Лекция 7 - 8. Замкнутые множества и непрерывные функции.

1 Предельные точки.

Определение 1 *Предельная точка для множества - это такая точка a, к которой сходится некоторая последовательность точек множества, отличных от a.*

Пример 1 *1. Концы интервала - его предельные точки. Любая точка интервала является для него предельной.*

2. Предельные точки отрезка - это точки самого отрезка и только они.

3. Множество, состоящее из одной точки, не имеет предельных точек.

Определение 2 *Точка множества называется изолированной, если она не является для этого множества предельной.*

Задача 1 *Точка множества называется изолированной, если у нее есть окрестность, в которой нет других точек этого множества. Докажите, что это определние эквивалентно предыдущему.*

Определение 3 *Объединение множества и всех его предельных точек называется* замыканием множества.

Пример 2 *1. Замыкание интервала - отрезок, полученный добавлением к интервалу его концов.*

2. Замыкание отрезка - он сам.

3. Замыкание конечного множества - оно само.

2 Замкнутые множества.

Определение 4 *Замкнутое множество на прямой - это дополнение к открытому.*

Дадим другое определение.

Определение 5 *Замкнутое множество - это множество, которое совпадает со своим замыканием, или, другими словами, содержит все свои предельные точки.*

Теорема 1 *Определения 4 и 5 эквивалентны.*

Доказательство Пусть A - дополнение к открытому множесьву U, a - его предельная точка. Мы должны доказать, что $a \in A$. Предположим противное: $a \in U$. Множество U открыто; значит, существует окрестность V точки a, целиком принадлежащая U.

С другой стороны, по определению 1, существует последовательность $(x_n \in A) : x_n \to a$. Но ни одна точка множества A не принадлежит V, в частности, $x_n \notin V \ \forall \ n$. Это противоречит сходимости $x_n \to a$, см. второе определение предела.

Пусть A содержит все свои предельные точки. Докажем. что тогда дополнение к A (оно обозначается U) открыто. Предположим противное. Пусть множество U содержит точку a, никакая окрестность которой не принадлежит U. Тогда для любого n в $\frac{1}{n}$-окрестности точки a существует точка $x_n \in A$. Значит, последовательность (x_n) сходится к a. Она удовлетворяет условию $x_n \neq a$, поскольку $x_n \in A, \ a \notin A$. Значит, $a \in A$ - противоречие. □

Замечание 1 *Замкнутость не является альтернативой к открытости: существуют множества, которые не являются ни открытыми, не замкнутыми. Пример - полуинтервал.*

Пример 3 *Дополнение к Канторову множеству - счетное объединение интервалов. Оно открыто. Значит, Канторово множество замкнуто.*

3 Операции над замкнутыми и открытыми множествами.

Предложение 1 *Объединение конечного или счетного (и вообще любого) числа открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Это предложение немедленно следует из определения 2 лекции 6.

Предложение 2 *Пересечение конечного или счетного (и вообще любого) числа замкнутых множеств замкнуто.*

Объединение конечного множества замкнутых множеств замкнуто.

Это немедленно выводится из предложения 1 с помощью перехода к дополнениям.

Задача 2 *Приведите пример замкнутого множества, равного счетному пересечению открытых.*

Задача 3 ** Докажите, что любое замкнутое множество можно представить в виде счетного пересечения открытых, а любое открытое - в виде счетного объединения замкнутых.*

4 Непрерывные функции: определения и примеры.

Два определения непрерывности в точке.

Определение 6 *Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Она называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $x_k \to x_0$, выполнено: $f(x_k) \to f(x_0)$.*

Определение 7 *Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Она называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 *Определения 6 и 7 равносильны.*

Доказательство Пусть выполнено определение 6. Предположим, что определение 7 не выполнено. Нам снова нужно использовать технику кванторов и отрицаний. Определение 7:

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta : \forall\ x|x - x_0| < \delta \text{ выполнено } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Его отрицание:

$$\exists\ \varepsilon : \forall\ \delta\ \exists\ x : |x - x_0| < \delta \text{ и } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Выберем ε, существование которого утверждает формула (1). Построим последовательность $x_n \to x_0$ так, что $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Получим противоречие с определением 6.

Поскольку в (1) δ произвольно, возьмем произвольное n и положим $\delta = \frac{1}{n}$. Возьмем $x_n = x$ из (1):

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Получаем: $x_n \to x_0,\ f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, противоречие.

Пусть выполнено определение 7. Возьмем произвольную последовательность $x_n \to x_0$. Докажем, что $f(x_n) \to f(x_0)$. Возьмем произвольное ε. Выберем δ из определения 7:

$$\forall\ x : |x - x_0| < \delta \text{ выполнено } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Возьмем N так, что при $n > N,\ |x_n - x_0| < \delta$. Тогда

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Это и значит, что $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Определение 8 *Функция непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.*

Чтобы определить функцию, непрерывную на отрезке, нужно либо модифицировать определение непрерывности в точке (в нем рассматриваются только функции, определенные в окрестности точки), либо продолжить функцию с отрезка на интервал, который его содержит. Мы выберем второй способ.

Определение 9 *Пусть $f : \sigma = [a, b] \to \mathbb{R}$ - функция на отрезке $\sigma : a \leq x \leq b$. Рассмотрим интервал $I = (\alpha, \beta)$, $I \supset \sigma$, $\alpha < \beta$. Стандартным проджолжением функции f на I назовем функцию $\tilde{f}$:*

$$\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ на } [a, b] \\ f(a) \text{ на } (\alpha, a] \\ f(b) \text{ на } [b, \beta). \end{cases}$$

Определение 10 *Функция на отрезке непрерывна, если непрерывно стандартное продолжение этой функции на некоторый интервал, содержащий этот отрезок.*

Замечание 2 *Непрерывность функции на отрезке не зависит от выбора интервала, на который она продолженится стандартным образом.*

Интервалы и отрезки, на которых заданы функции, могут быть как конечными, так и бесконечными.

Функция не являющаяся непрерывной (в точке), называется разрывной (в этой точке).

Пример 4

1. *Функции $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv const$, $f(x) = x$ непрерывны на всей прямой.*
2. *Функция $sign\ x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0 \end{cases}$ непрерывна при $x \neq 0$ и разрывна при $x = 0$.*
3. *Функция $f = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна при $x \neq 0$ и разрывна при $x = 0$.*

Задача 4

1. *Докажите, что функция* $\sin$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$
2. *То же для x и x^2*
3. *Нарисуйте замыкание графика функций* $\sin x$; $\sin \frac{1}{x}$ *при* $x \neq 0$.

4. *Ограниченная функция на замкнутом множестве непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.*

5. *Пусть ограниченная функция f задана при $x \neq 0$, и замыкание ее графика биективно проектируется на $Ox : (x, y) \mapsto x$. Докажите, что f непрерывно продолжается на $\mathbb{R}$.*

6. *Та же задача, если функция задана на Q.*

5 Арифметика непрерывных функций.

Теорема 3 *Суммы, разности и произведения непрерывных функций с общей областью определения непрерывны. Частное двух непрерывных функций с ненулевым знаменателем непрерывно.*

Доказательство Эта теорема немедленно следует из определения 6 и теоремы об арифметике пределов. □

Эта теорема невероятно расширяет наш арсенал непрерывных функций. Из непрерывности функций $f(x) = const$ и $f(x) \equiv x$ следует

- непрерывность любого многочлена;
- непрерывность любой рациональной функции (отношения многочленов) с ненулевым знаменателем;
- непрерывность любой рациональной функции на любом интервале между нулями знаменателя;
- непрерывность тригонометрических многочленов.

Задача 5 *Дайте определение понятия $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.*

Задача 6 *Докажите что если $f(x)$ нерерывна в точке 0, отлична от нуля вне нуля, и равна нулю в нуле, то $\frac{1}{f(x)} \to \infty$ при $x \to 0$.*

6 Теорема о промежуточном значении.

Теорема 4 *Пусть непрерывная функция на отрезке положительна в левом конце и отрицательна в правом. Тогда она принимает нулевое значение в некоторой точке внутри отрезка.*

Доказательство Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - данная функция. Рассмотрим множество

$$P = \{x \in [a, b] | f(x) > 0\}.$$

Это множество непусто: $f(a) > 0$. Оно не соврадает со всем отрезком: $f(b) < 0$. Пусть

$$c = \sup P;$$

c существует по теореме 3 лекции 5. Докажем, что $f(c) = 0$.

Предположим противное. Пусть $f(c) > 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ и такое δ, что

$$\forall\ x : |x - c| < \delta,\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Тогда для каждого такого x, $f(x) > 0$. Другими словами:

если непрерывная функция положительна в некоторой точке, то она положительна в окрестности этой точки.

Но тогда δ-окрестность точки c не пересекается с P. Значит, $c \neq \sup P$, противоречие. ☐

6.1 Непрерывные функции на отрезке.

Теорема 5 *Непрерывная функция на отрезке ограничена и принимает свое наибольшее и наименьшее значение.*

Доказательство Докажем ограниченность. Предположим противное. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ неограничена сверху. Тогда

$$\forall\ n\ \exists\ x_n \in [a, b] : f(x_n) > n.$$

Выберем из последовательности (x_n) сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}; пусть x_0 - ее предел. Тогда по определению 6, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Но по построению, $f(x_{n_k}) > n_k$. Следовательно, $f(x_{n_k}) \to \infty$; значит, $f(x_{n_k}) \not\to f(x_0)$ - противоречие.

Итак, функция f ограничена; значит, существует $\sup f$ и $\inf f$ на $[a, b]$; $\sup f = \sup\{y = f(x) | x \in [a, b]\}$. Возьмем последовательность x_n так, что $y_n = f(x_n) \to \sup f$. Выберем из (x_n) сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) : x_{n_k} \to x_0$. Тогда $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to \sup f$ (подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же предел). Но $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = \sup f$. ☐

Мы можем теперь написать

$$f(x_0) = \max_{[a,b]} f.$$

6.2 Условие Липшица.

Самое простое условие, похожее на непрерывность, но более сильное - это условие Липшица. Оно говорит, что погрешность в вычислении значения функции не превышает константы на погрешность в вычислении аргумента.

Определение 11 *Функция на прямой (отрезке, интервале) удовлетворяет Условию Липшица (липшицева), если существует такое L, что для любых $x, y \in dom f$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Задача 7
1. *Докажите, что липшицева функция на отрезке непрерывна.*
2. *Докажите, что функция x^2 на любом отрезке липшицева, а на прямой - нет.*
3. *То же для любого многочлена.*
4. *Докажите, что функция $\sin x$ на прямой липшицева и найдите константу Липшица.*

6.3 Равномерная непрерывность.

Равномерно непрерывные функции похожи на липшицевы, но могут быть “хуже”.

Определение 12 *Функция на прямой (отрезке, интервале) называется* равномерно непрерывной*, если*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta : \forall\, x, y : |x - y| < \delta,\ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Задача 8
1. *Липшицева функция равномерно непрерывна.*
2. *Приведите пример непрерывной, но не липшицевой функции.*
3. *Приведите пример непрерывной, но не равномерно непрерывной функции на интервале.*

Теорема 6 *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна.*

Доказательство Предположим противное. Сформулируем отрицание для (2):

$$\exists\, \varepsilon\ \forall\, \delta\ \exists\, x, y : |x - y| < \delta,\ \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

Дальше рассуждение похоже на доказательство теоремы 2. Фиксируем ε из (3). Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Берем сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} из последовательности $(x_n) : x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. Докажем, что в точке x_0 функция f разрывна. Действительно, в любой окрестности этой точки существуют точки x_{n_k} и y_{n_k} такие, что

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

Следовательно, функция f разрывна в точке x_0 - противоречие. $\square$

(Вариант окончания доказательства: рассмотрим смешанную последовательность $x_{n_1}, y_{n_1}, x_{n_2}, y_{n_2} \ldots$. Она сходится к x_0. Последовательность $(f(x_{n_1}), f(y_{n_1})), \ldots$ не фундаментальна, поскольку $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \ \forall \ k$. Значит, последовательность $(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}))$ расходится - противоречие.)