Листок 1.2

Ряды. Топология на $\mathbb{R}$

срок сдачи 25 октября

Задача 1. Докажите теорему сравнения: если $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ |b_n| \leq a_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже сходится.

Задача 2. Сформулируйте и докажите аналогичную теореме из задачи 1 теорему о расходимости.

Задача 3. * Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$?
Указание: примените геометрический метод.

Задача 4. * Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log_2 n)^2}$?

Задача 5. Верно ли, что пересечение счётного количества открытых всюду плотных множеств на прямой:

а) обязательно непусто;

б) всюду плотно на прямой?

Задача 6. Назовём ε-окрестностью множества A объединение ε-окрестностей всех его точек; обозначение: A^ε. Докажите, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ замкнуто, то $A = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} A^\varepsilon$.

Задача 7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество. Что можно сказать о пересечении всех его ε-окрестностей с положительным ε: $B = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} A^\varepsilon$?

Задача 8. Докажите, что множество предельных точек (частичных пределов) любой последовательности замкнуто.

Задача 9. * Дано произвольное замкнутое множество $A \subset [0,1]$. Постройте последовательность, множество предельных точек которой совпадает с A.

Задача 10. Докажите, что никакой интервал нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств $\mathbb{R}$.