Лекция 6. Открытые и замкнутые множества.

1 Открытые множества на прямой.

Определение 1 ε-окрестностью точки на прямой *называется открытый шар радиуса ε с центром в этой точке. Интервал, содержащий данную точку, называется* окрестностью *этой точки. Открытый луч называется* полубесконечным, *а вся прямая* – бесконечным интервалом.

Шар на прямой - это интервал. В дальнейшем теми же словами будет определяться ε-окрестность точки на плоскости, в пространстве и т.д. Поэтому, наряду со словом интервал, употребляется слово шар.

Обозначение для ε-окрестности точки $a : U_\varepsilon(a)$. На языке формул:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \varepsilon\}.$$

Определение 2 *Множество называется* открытым, *если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ее окрестность.*

Примеры.

1. Интервал является открытым множеством, а отрезок - нет.
2. Конечное объединение интервалов является открытым множеством.
3. Счетное объединение интервалов является открытым множеством.
4. Конечное пересечение интервалов является открытым множеством, а счетное - не всегда.
5. Дополнение к Канторову множеству открыто.
6. Пустое множество открыто.

Упражнение 1 *Объясните эти примеры.*

2 Второе определение предела

Определение 3 *Число a назывется пределом последовательности (x_n), если для каждой окрестности U точки a существует такое N, что*

$$x_n \in U \forall n > N. \tag{1}$$

Первое определение предела - традиционное. Мы его здесь не повторяем.

Замечание 1 *Определение 3 очень напоминает геометрическую интерпретацию традиционного определения предела.*

Предложение 1 *Определение 3 эквивалентно данному ранее первому определению предела.*

Доказательство Пусть последовательность (x_n) удовлетворяет определению 3. Возьмем произвольное m и рассмотрим $\frac{1}{m}$-окрестность точки a; обозначим ее U. По определению 3 существует такое N , что выполнено соотношение (1). Но это и значит, что $\forall n > N,\ |a - x_n| < \frac{1}{m}$.

Обратно, пусть последовательность удовлетворяет старому определению предела. Тогда для любого m существует такое N, что все члены последовательности, начиная с $N+1$-го принадлежат $\frac{1}{m}$-окрестности точки a. Но любая окрестность точки a содержит ее $\frac{1}{m}$-окрестность. Это доказвает предложение. □

3 Плотность рациональных чисел

Определение 4 *Множество называется* плотным *на прямой, если оно имеет непустое пересечение с любым интервалом.*

Определение 5 *Множество называется* плотным *подмножесвом множества X, если оно имеет непустое пересечение с любой окрестностью любой точки множества X.*

Теорема 1 *Множество рациональных чисел плотно.*

Доказательство Рассмотрим произвольный интервал U и докажем, что он содержит рациональное число. Возьмем произвольное $a \in U$. Если $a \in Q$, то все доказано. Если a иррацилонально, возьмем последовательность рациональных чисел, которая представляет a. По теореме 3 лекции 5 она сходится к a. По определению 3, все ее члены, кроме конечного числа, принадлежат U. □

Верно ли, что множество рациональных чисел плотно на любом отрезке?

4 Структура открытого множества.

Пример 3 исчерпывает запас всех открытых множеств на прямой.

Теорема 2 *Любое открытое множество на прямой является дизъюнктным объединением конечного или счетного числа интервалов.*

Отметим, что у этой теоремы нет аналогов в старших размерностях.

Доказательство Пусть $U \subset \mathbb{R}$ - непустое открытое множество. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на U:

$$a \sim b \Leftrightarrow [a,b] \subset U. \tag{2}$$

Множество U распадается на классы эквивалентности. $\square$

Лемма 1 *Каждый класс эквивалентности, определенный соотношением* (2) *для открытого множества U - это интервал, конечный или бесконечный.*

Сформулируем общую лемму, которая влечет лемму 1 и будет полезна в дальнейшем. Напомним, что множество называется *выпуклым* если вместе с любыми двумя точками оно содержит отрезок, их соединяющий.

Лемма 2 *Любое выпуклое открытое множество на прямой является интервалом.*

Доказательство Рассмотрим выпуклое открытое множество $V \subset \mathbb{R}$.

Случай 1. Множество V ограничено сверху и снизу. По теореме 1 лекции 5 у этого множества существуют супремум и инфимум; пусть

$$a = \inf V, \;\; b = \sup V.$$

Докажем, что

$$V = (a,b). \tag{3}$$

Докажем сначала, что

$$(a,b) \subset V. \tag{4}$$

Пусть x - произвольная точка из V, а c произвольная точка из (a,b). Докажем, что $c \in V$. Если $c = x$ - нечего доказывать. Пусть $c > x$. По определению супремума, для любого ε существует такое $y \in V$, что

$$b - y < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon < b - c$. Тогда $y > c$. Но $y \in V$, значит, $y \sim x$, значит,

$$[x,y] \subset U.$$

Точка $c \in [x,y]$, значит, $c \in U$. В силу выпуклкости множества V, $[x,y] \subset V$, значит, $c \in V$.

Докажем теперь, что $V \subset (a,b)$, или, что равносильно, если $c \notin (a,b)$, то $c \notin V$. Пусть $c < a$. Тогда $c \notin V$, поскольку $a = \inf V$. Аналогично, если $c > b$, то $c \notin V$.

Пусть теперь $c = a$. Предположим, что $a \in V$. Поскольку $V \subset U$, и U открыто, существует окрестность $U_\varepsilon(a) \subset U$. Все точки этой окрестности эквивалентны между собой; но пересечение $U_\varepsilon(a) \cap V$ непусто. Значит, $U_\varepsilon(a) \subset V$; это противоресит тому, что $a = \inf V$.

Аналогично, $b \notin V$. Это доказывает (3).

Случай 2. Множество V неограничено ни сверху, ни снизу. Тогда $V = \mathbb{R}$ (докажите!)

Случай 3. Множество V неограничено сверху, но ограничено снизу. Тогда V - луч (a, ∞) для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Действительно, пусть $a = \inf V$. Для дюбого $c \in (a, \infty)$ существует $x \in (a, c] \cap V$, $x < c$, и $y \in V$, $y > c$. Поскольку $x \sim y$, получаем: $c \in [x, y] \subset V$. Следовательно, $(a, \infty) \subset V$. То, что $a \notin V$ и любое $c < a$ не принадлежит V, доказывается, как в случае 1. $\square$

Доказательство леммы 1.

Рассмотрим класс эквивалентности $V \subset U$. Он выпуклый по определению отношения эквивалентности. Возьмем любую точку $a \in V$. Поскольку она принадлежит открытому множеству U, у нее есть окрестность, принадлежащая U. Все точки этой окрестности эквивалентны a. Значит, вся окрестность принадлежит V. Следовательно, V открыто. По лемме 2, V - интервал. $\square$

Итак, U равно дизъюнктноиу объединению интервалов. Но число таких интервалов не более, чем счетно. Действительно, в каждом из них можно взять по одной рациональной точке. Это доказывает теорему 2.