Досрочная сдача – часть III

Задача 1. Докажите, что функция f на прямой непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества под действием этой функции открыт:

$$U \text{ открыто } \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ открыто } .$$

Задача 2. Остается ли это утверждение верным, если в нем “прообраз” заменить на “образ”?

Задача 3. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.

Задача 4. Функция Римана определена на $[0, 1]$, равна нулю в иррациональных точках, а для каждого рационального числа обратна знаменателю несократимой дроби, которая представляет это число. В каких точках функция Римана непрерывна?

Задача 5. Верно ли, что множество всех непрерывных функций на прямой континуально?

Задача 6. Канторова лестница - это функция f, которая строится на отрезке $[0, 1]$ по индукции параллельно с посторением множества Кантора.

База: $f(0) = 0,\ f(1) = 1$, на замкнутой средней трети отрезка $[0, 1]$ $f = \frac{1}{2}$.

Шаг. Пусть функция f задана на замыкании дополнения ко всем отрезкам ранга n. Тогда на замкнутой средней трети каждого отрезка ранга n она равна среднему арифметическому своих значений на концах этого отрезка. Докажите следующие свойства функции f.

a) Эта функция может быть продолжена на карторово множество до непрерывной монотонной функции на отрезке.

b) Канторова лестница отображает сюръективныо канторово множество на отрезок $[0, 1]$.

c) *Канторова лестница удовлетворяет условию Гельдера. Найдите наибольшее значение ее показателя Гельдера.

d) Для любого $x \in [0, 1]$ найдите значение функции Кантора в точке x.

Задача 7. В каких точках дифференцируема функция Кантора?

Задача 8. Докажите, что дифференцируемая функция на прямой имеет не более, чем счетное множество простых нулей.

Задача 9. Приведите пример всюду дифференцируемой функции f на $\mathbb{R}$ такой, что $f(x) = o(x^2)$, но $f'(x) \neq 0(x)$ при $x \to 0$.

Задача 10. Докажите, что функция, удовлеторяющая условию Липщица на множестве рациональных чисел, непрерывно продолжается на всю прямую.