

Questions for colloquium on Functional analysis (October, 30, 2017)

- (1) Vector and Euclidean spaces. Inner product.
- (2) Orthonormal systems of vectors. Pythagoras theorem, Bessel and Schwarz inequalities, the parallelogram law.
- (3) Normed vector spaces, relation with the Euclidean spaces.
- (4) The bounded linear transform theorem.
- (5) Hilbert spaces: definition and examples. Direct sum.
- (6) The projection theorem.
- (7) The space dual of the Hilbert space. The Riesz lemma and sesquilinear form.
- (8) Orthonormal bases. The Parseval theorem.
- (9) Gram–Schmidt orthogonalization, separable Hilbert spaces.
- (10) Tensor products of Hilbert spaces.
- (11) Banach spaces: definition, space L^p and other examples.
- (12) Bounded linear operators in the normed spaces.
- (13) Dual and double duals of the Banach space, reflexive Banach spaces.
- (14) Hahn-Banach theorem for the real case.
- (15) Hahn-Banach theorem for the complex case and its Corollaries.
- (16) Banach spaces: direct sums and quotient space.
- (17) The Baire category theorem
- (18) The Banach–Steinhaus theorem (the principle of uniform boundedness).
- (19) The open and inverse mapping theorems.
- (20) The closed graph and the Hellinger–Toeplitz theorems.

Вопросы к коллоквиуму по функциональному анализу (30 октября 2017)

- (1) Векторные и евклидовы пространства. Внутреннее (скалярное) произведение.
- (2) Ортонормированные системы векторов. Теорема Пифагора, неравенства Бесселя и Коши–Буняковского, тождество параллелограмма.
- (3) Нормированные векторные пространства, связь с евклидовыми.
- (4) Теорема об ограниченном линейном отображении.
- (5) Гильбертовы пространства: определение и примеры. Прямая сумма.

- (6) Теорема об ортогональной проекции.
- (7) Пространство сопряженное к гильбертову. Лемма Рисса и полуторолинейные формы.
- (8) Ортонормированные базисы. Теорема Парсеваля.
- (9) Ортогонализация Грама–Шмидта, сепарабельные гильбертовы пространства.
- (10) Тензорные произведения гильбертовых пространств.
- (11) Банаховы пространства: определение, пространство L^p и другие примеры.
- (12) Ограниченные линейных операторы в нормированных пространствах.
- (13) Пространства сопряженные и дважды сопряженные к банахову, рефлексивные банаховы пространства.
- (14) Теорема Хана–Банаха для вещественного случая.
- (15) Теорема Хана–Банаха для комплексного случая и ее следствия.
- (16) Банаховы пространства: прямые суммы и фактор-пространства.
- (17) Теорема Бэра о категориях.
- (18) Теорема Банаха–Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности).
- (19) Теоремы об открытом и обратном отображении.
- (20) Теоремы о замкнутом графике и Хеллингера–Теплица.