КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 3. Группы-1: Определение и простейшие свойства

1. Пусть задана бинарная операция $*$ на множестве M. Элемент $e \in M$ называется нейтральным справа (слева), если

$$\forall\, m \in M : m * e = m \quad (\forall\, m \in M : e * m = m).$$

1) Определим бинарную операцию на множестве целых чисел по правилу

$$m * n = m - n.$$

Изучить свойства этой операции: ассоциативность, коммутативность, существование нейтральных элементов справа и слева.

2) Пусть бинарная операция $(M, *)$ содержит элемент e_1, нейтральный справа, и элемент e_2, нейтральный слева. Доказать, что $e_1 = e_2$. В этом случае $(M, *)$ обладает нейтральным элементом.

3) Пусть дан **моноид**, т.е. ассоциативная бинарная операция $(M, *)$ на множестве M с нейтральным элементом. Если $a^d = e$, где $d \in \mathbb{N}$, тогда a имеет обратный.

4) Пусть в моноиде $(M, *)$ каждый элемент имеет обратный слева, т.е.

$$\forall\ a \in M \,\exists\ b \in M : b * a = e.$$

Докажите, что $(M, *)$ – группа.

5) Пусть $(M, *)$ – множество с ассоциативной бинарной операцией. Предположим, что

$$\forall\, a \in M \,\exists\, e_a \in M : a{*}e_a = e_a{*}a = a, \quad \forall\, a \in M \,\exists\, b_a \in M : a{*}b_a = b_a{*}a = e_a.$$

Верно ли, что $(M, *)$ – группа?

2. 1) Пусть G – группа такая, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Доказать, что G – коммутативная группа.

2) Пусть G – группа. Докажите, что соотношение $a^5 b^3 = a^8 b^5 = e$ влечет $a = b = e$.

3) Пусть G – группа такая, что $a^3 = e$ для любого $a \in G$. Доказать, что

$$\forall\, a, b \in G : (ab)^2 = b^2 a^2, \quad ab^2 a = ba^2 b, \quad a^2 ba^2 = b^2 ab^2.$$

3. Пусть G – конечная группа, имеющая $2n$ элементов. Доказать, что G содержит элемент $a \neq e$ такой, что $a^2 = e$.

4. 1) Показать, что группа $GL_2(\mathbb{F}_2)$ не является коммутативной.

2) Найти порядки всех элементов группы $GL_2(\mathbb{F}_2)$.

3) Пусть $M \in GL_2(\mathbb{F}_2)$. Найти общую формулу для M^{-1}.

4) Доказать, что каждый элемент из $GL_2(\mathbb{F}_2)$ определяет некоторую перестановку из трех элементов.

5) Доказать, что $GL_2(\mathbb{F}_2)$ изоморфна *группе перестановок* S_3 трех элементов.

6) Сколько подгрупп содержит группа $GL_2(\mathbb{F}_2)$?

7^+) *Докажите, что любая некоммутативная группа содержит по крайней мере шесть различных подгрупп.* (Определение подгруппы будет дано 11 октября. Дайте, пожалуйста, определение подгруппы на семинаре.)

5. Группа $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

1) Найти три различные подгруппы в $GL_3(\mathbb{F}_2)$, изоморфные $GL_2(\mathbb{F}_2)$.

2) Показать, что перестановки базисных векторов e_1, e_2 и e_3 определяют матрицу в $GL_3(\mathbb{F}_2)$. Это дает еще одну копию $GL_2(\mathbb{F}_2)$ в $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

3) Доказать, что ступенчатые матрицы

$$P = \{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_2 & a_4 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_2)\}$$

образуют подгруппу в $GL_3(\mathbb{F}_2)$. Найти M^{-1}.

4) Найти порядок подгруппы P.

5) Найти элемент максимального порядка в P.

6^*) Найти элементы "большого"порядка в $GL_3(\mathbb{F}_2)$. Каков может быть максимальный порядок элементов группы $GL_3(\mathbb{F}_2)$?

7^*) (*Задача для студентов, уже знакомых с теорией групп.*) Найти все классы сопряженных элементов $\{g^{-1}Mg,\ g \in GL_3(\mathbb{F}_2)\}$ в группе $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

8^*) Решить аналогичную задачу для любого $M \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$.

$9^!$) Вы можете поставить этот вопрос для классов матриц

$$\{g^{-1}Mg,\ g \in GL_n(\mathbb{F}_2)\}, \quad M \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2).$$

6. Группы Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$, $H_3(\mathbb{Z})$, $H_3(\mathbb{F}_2)$. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_2$.

1) Доказать, что множество

$$H(A) = \{N = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{A}\}$$

с операцией умножения матриц является группой. Найти N^{-1}.

2) Найти разные копии линейного пространства $\mathbb{F}_2^2$ в группе $H(\mathbb{F}_2)$.

3) Показать, что $H(\mathbb{F}_2)$ – некоммутативная группа порядка 8. Найти порядки всех элементов этой группы. См. Упр. **2**-1).