КУРС АЛГЕБРЫ, Листок 1, продлен до 15 октября

Линейные подпространства в $\mathbb{F}_2^n$.

1. Тег: Грассманиан. Зафиксируем какое-нибудь подпространство V_4 размерности 4 в $\mathbb{F}_2^8$.

1) Найти число подпространств $U_6 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 6 таких, что U_6 содержит V_4.

2) Найти число подпространств $U_4 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 4 таких, что их пересечение тривиально $V_4 \cap U_4 = \{\bar{0}\}$.

3) Найти решения 1)–2), используя рассуждения с базисами, и сравнить его с решением, получаемым с применением конструкции фактор-пространств (**Вопрос пока отменяется!**).

4) Найти число подпространств $U_4 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 4 таких, что

$$\dim (V_4 \cap U_4) = 2.$$

5) Найти число упорядоченных пар подпространств (V_6, U_6) в $\mathbb{F}_2^8$ размерности 6 таких, что

$$V_6 + U_6 = \mathbb{F}_2^8.$$

2. Тег: Двойственность. Задача к Лемме 1 из Лекции 4. (См. Упражнение 10 Темы 2.)

По любому подпространству $U \subset \mathbb{F}_2^n$ мы можем определить "двойственное" к нему подпространство, используя результат Леммы 1:

$$U^0 = \{v \in \mathbb{F}_2^n \,|\, \forall\, u \in U \ (u, v) = 0\}.$$

(Иногда используют обозначение $U^{\perp}$ для U^0.)

1) Доказать, что отображение $U \mapsto U^0$ является биективным отображением множества всех подпространств $\mathbb{F}_2^n$ на себя.

2) Доказать, что число подпространств в $\mathbb{F}_2^n$ размерности k равно числу подпространств в $\mathbb{F}_2^n$ размерности $n-k$.

3) Найти примеры подпространств в $\mathbb{F}_2^n$ таких, что $U = U^0$.

4*) Найти число подпространств в $\mathbb{F}_2^8$ таких, что $U = U^0$. (*Можно сдать письменное решение задачи В.А. Гриценко.*)

3. Метод Гаусса. Пусть $(u_1, \ldots, u_k)$ – базис подпространства $V_k \subset \mathbb{F}_2^n$. Используя метод Гаусса, найдем систему из $n-k$ линейных однородных уравнений, определяющую подпространство U_k. Оценить число операций сложения, выполняемых в методе Гаусса.

4*. Дестабилизация базиса. Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ – базис пространства $\mathbb{F}_2^n$. Изменим первую координату (в каноническом базисе) вектора u_1 на единицу. Иными словами, если $u_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, то заменим a_{11} на $(a_{11}+1)$. Найти число базисов $\mathbb{F}_2^n$, которые останутся базисами после этого преобразования. (*Можно сдать письменное решение этой задачи В.А. Гриценко.*)