ЛЕКЦИЯ 6. Метод ГАУССА и ДВОЙСТВЕННЫЙ БАЗИС.

В этой лекции мы опишем алгоритм решения систем линейных уравнений, позволяющий найти и двойственный базис для любого базиса пространства $\mathbb{F}_2^n$. В Лекциях 7 и 8 мы увидим, что нахождение двойственного базиса эквивалентно явному построению отображения обратного к биективному линейному отображению из $\mathbb{F}_2^n$ в $\mathbb{F}_2^n$.

Вернемся к примеру из Лекции 5.

Вопрос 1. Как найти все решения однородной системы линейных уравнений?

Пример 1. Найдем все решения системы однородных линейных уравнений, заданной матрицей A_V из Примера 2 (стр 21) предыдущей лекции. Элементарные преобразования строк матрицы A_V соответствуют элементарным преобразованиям с уравнениями системы, которые переводят ее в эквивалентную систему. (Смотри доказательство Предложения 3.2 из Лекции 3 на стр. 11.) Поэтому исходная система уравнений и системы, построенные по матрицам $A_V^{(2)}$ или $A_V^{(3)}$ (см. стр. 22–23), эквивалентны.

$$S_A : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \quad + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \quad + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \quad + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{cases}$$

Рассматривая все переменные начиная с x_5 находим общее решение через неосевые переменные x_2 и x_4:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 + x_4, x_2, x_4, x_4, 0), \qquad \text{где} \quad x_2, x_4 \in \mathbb{F}_2.$$

Следовательно, мы получаем векторное описание подпространства S_A решений системы, заданной матрицей A_V:

$$S_A = \{(x_2+x_4, x_2, x_4, x_4, 0)\} = \{x_2(1,1,0,0,0)+x_4(1,0,1,1,0), x_2, x_4 \in \mathbb{F}_2\}$$

или

$$S_A = \langle X_1 = (1,1,0,0,0), X_2 = (1,0,1,1,0)\rangle.$$

Отметим, что элементы базиса (X_1, X_2) пространства решений S_A есть вектора-столбцы $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$ коэффициентов уравнений, задающих подпространство V (см. стр. 24). Иначе говоря, все вектора подпространства $V = \langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle \subset \mathbb{F}_2^5$, порожденного векторами-строчками матрицы A_V, удовлетворяют системе уравнений, коэффициенты которых заданы векторами-столбцами

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Чтобы **осознать** это факт перепишем результат в следующем "самодвойственном"виде:

$$(u_i, X_j) = 0, \quad \text{где} \qquad 1 \le i \le 4, \ 1 \le j \le 2.$$

(см. Задачу 2 Листка 1).

Вопрос 2. Как найти все вектора b, для которых система неоднородных уравнений имеет решение?

Соответствующий общий результат был сформулирован в Теореме 9 Лекции 5 (стр. 26). Как решить задачу практически?

Пример 2. Продолжим изучение системы из предыдущего примера. Матрица $A = A_V$ системы уравнений совпадает с координатами четырех образующих подпространства V. Для решения Вопроса 2 рассмотрим матрицу по столбцам.

Неоднородная система линейных уравнений $(A|b)$ эквивалентна векторному уравнению

$$\sum_{i=1}^{5} \underline{A}_i \cdot x_i = A \cdot \underline{X} = \underline{b} \in \mathbb{F}_2^4,$$

где $\underline{A}_i$ $(1 \le i \le 5)$ – столбцы матрицы A_V, а $\underline{X} \in \mathbb{F}_2^5$ – вектор-столбец переменных. Отметим, что $\mathcal{A}(\underline{X}) = A \cdot \underline{X}$ есть линейное отображение $\mathbb{F}_2^5$ в $\mathbb{F}_2^4$, рассмотренное в Лекции 5 (стр. 25).

Образ линейного отображения $\mathcal{A} : \mathbb{F}_2^5 \to \mathbb{F}_2^4$, задаваемого матрицей A, совпадает с линейной оболочнъкой столбцов $\langle \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_5 \rangle \subset \mathbb{F}_2^4$, базис которого можно методом Гаусса для **столбцов**, т.е. для строк "перевернутой"(**транспонированной**) матрицы A^t размера 5 на 4.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейная оболочка векторов-столбцов $\underline{A}_i$ $(1 \le i \le 5)$ исходной матрицы имеет базис из трех векторов. Следовательно, получаем первое описание образа линейного отображения

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Второе описание образа можно получить про помощи уравнений. Последний столбец приведенной ступенчатой матрицы, полученной из A^t

дает уравнение $y_4 = y_3 + y_2 + y_1$, задающее линейную оболочку векторов-столбцов. Следовательно, *система уравнений* $A\underline{x} = \underline{b}$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\underline{b}$ *лежит в этой гиперплоскости, т.е. координаты* $\underline{b}$ *удовлетворяют уравнению* $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$.

Оформим теперь общий алгоритм, **метод Гаусса решения систем линейных уравнений**, примененный в разобранных выше двух примерах. Напомним, что *осевым* элементом ненулевой строчки $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_2^n$ называется её первый ненулевой элемент.

Определение. *Матрица* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$ *называется* **ступенчатой** *(или эшелонированной), если*

1) все её нулевые строки стоят ниже ненулевых;

2) номера осевых элементов $a_{1j_1}, \dots, a_{kj_k}$ *ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность* $1 \le j_1 \dots < j_k \le m$.

Таким образом, ступенчатая матрица размера $m \times n$ имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{kj_k} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ненулевые элементы $a_{1j_1}, \dots, a_{kj_k}$ называются **осевыми элементами** ступенчатой матрицы. (Отметим, что все осевые элементы ненулевые.) Следующая лемма является обобщением результата из Примера 1 (стр. 21).

Лемма 1. *Ранг приведенной выше ступенчатой матрицы равен* k. *Первые* k *строк ступенчатой матрицы линейно независимы. Столбцы, отвечающие осевым элементам, т.е. столбы с номерами* $j_1, \dots j_k$, *образуют базис в пространстве столбцов ступенчатой матрицы.*

Доказательство. Обозначим вектор-строки ступенчатой матрицы u_1, $\dots$, $u_m \in \mathbb{F}_2^n$. Тогда произвольная линейная комбинация w векторов-строк имеет вид

$$\begin{aligned} w &= b_1u_1 + \dots + b_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_ku_k \\ &= (0, \dots, 0, b_1a_{1j_1}, b_1a_{1j_1+1}, \dots, (b_2a_{2j_2} + b_1a_{1j_2}), \dots, (b_ka_{kj_k} + \dots), \dots). \end{aligned}$$

Необходимым условием того, что линейная комбинация равна нулю будет условие $b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow b_k = 0$. (См. Пример 1 на стр 21.) Но тогда $w = 0$. Следовательно k строк, отвечающих осевым элементам, линейно независимы. Аналогично получаем, что столбцы, отвечающие осевым элементам, линейно независимые и образуют базис подпространства столбцов.

□

Теорема 10. *Любую матрицу с коэффициентами из $\mathbb{F}_2$ можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. При этом ранг матрицы равен числу осевых элементов ступенчатой матрицы.*

Доказательство. Если M содержит только нулевые элементы, то она ступенчатая. Пусть j_1 – номер её первого ненулевого столбца. Переставив строки, добьёмся того, чтобы $a_{1j_1} \neq 0$ (т.е. $a_{1j_1} = 1$). Прибавив, если нужно, новую первую строчку ко всем остальным, добьёмся того, чтобы все элементы первого столбца, кроме a_{1j_1}, стали равными нулю. Рассмотрим теперь новую матрицу без первой строчки. Поступая с ней аналогичным образом, мы получим вторую строчку искомой ступенчатой матрицы. Продолжая, мы получим, в итоге, ступенчатую матрицу. (Сравните с доказательством Предложения 3.2 на стр. 12.) Результат о ранге следует из Леммы 1 и Леммы Гаусса (стр. 20).

□

Замечание. Построенная ступенчатая матрица, конечно, не единственная. Её форма зависит от выбора первой, второй, ..., k-й строчек. Число осевых элементов совпадет с размерностью подпространства, порожденного строками, следовательно, не зависит от способа приведения.

Алгоритм Гаусса для систем линейных уравнений.

1. **Нахождение всех решений.** Пусть дана система неоднородных линейных уравнений с расширенной матрицей $(A|b)$, где $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i\le m}^{1\le j\le n} \in M_{mn}(\mathbb{F}_2)$ и $b \in \mathbb{F}_2^n$

$$(A|b): \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

Элементарные преобразования с уравнениями (т.е. со строками расширенной матрицы $(|\underline{b})$) переводят исходную систему в эквивалентную (см. доказательство Предложения 3.2 на стр. 12). Приведем матрицу системы к ступенчатой. Получим систему, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = b'_1 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \qquad\qquad a_{kj_k}x_{j_k} + \ldots & = b'_k \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = b'_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = b'_m \end{cases}$$

Если $b'_i \neq 0$ для хотя бы одного $k+1 \leq i \leq m$, то система несовместна. Пусть $b'_{k+1} = \cdots = b'_m = 0$. Полагаем все $(n-k)$ неосевые переменные x_j $(j \neq i_1, \dots, i_k)$ произвольными элементами поля $\mathbb{F}_2$. Осевые переменные однозначно находим из первых k уравнений ($a_{ij_i} \neq 0!$), начиная с последних индексов $x_{j_k}, x_{j_{k-1}}, \dots, x_{j_1}$. (См. Пример 1 на стр. 26.) В частности, если вектор $b = \bar{0}$ нулевой, мы найдем все осевые переменные $x_{j_1}, \dots x_{j_k}$ в виде линейной комбинации неосевых. Следовательно, однородная система линейных уравнений имеет 2^{n-k} решений, где k ранг матрицы A. Записывая общее решение $(x_1, \dots, x_n)$ в виде линейной комбинации с неосевыми коэффициентами x_j $(j \neq i_1, \dots i_k)$, получим базис в пространстве решений однородной системы уравнений (См. Пример 1) и описание всех решений в неоднородном случае (см. Предложение 1, стр. 25).

2. Описание всех $b \in \mathbb{F}_2^m$ для которых решения возможны. Для этого надо найти *методом Гаусса для векторов* базис пространства столбцов матрицы A (см. Пример 2). Приведем матрицу A^t элементарными преобразованиями к ступенчатому виду и получим размерность пространства столбцов, т.е. размерность образа $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ линейного отображения, заданного матрицей A, и его базис. Затем аннулируем все элементы над осевыми элементами. Неосевые столбцы дадут нам уравнения, задающие образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

3. Важный частный случай $n = m$ и $\operatorname{rank} A = n$.

Пусть $n = m$ и $\operatorname{rank} A = n$. Решим систему линейных уравнений для любого $\underline{b} \in \mathbb{F}_2^n$

$$A \cdot \underline{X} = \underline{b}.$$

После приведения матрицы A к ступенчатому виду мы получим верхнетреугольную матрицу A' ($\operatorname{rank} A = n$)

$$A' \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \underline{b}'.$$

Приводя к нулю все элементы над осевые (начиная с последнего осевого элемента), получим эквивалентную систему с единичной диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \underline{b}''.$$

Следовательно, $\underline{X} = \underline{b}''$, т.е. $x_i = b''_i$ для $1 \leq i \leq n$.

4. Алгоритм нахождения двойственного базиса.

Как найти двойственный базис для базиса $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ пространства $\mathbb{F}_2^n$?

Рассмотрим матрицу A, строчками которой являются вектора базиса. Для любой системы уравнений $A \cdot \underline{X} = \underline{b}$ приходится выполнять одни и те же элементарные преобразования со строками матрицы A. Решим **одновременно** систему для n различных векторов $\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n} \in \mathbb{F}_2^n$, образующих единичную диагональную матрицу (см. пункт **3**),

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2).$$

Выше записано n систем линейных уравнений с одной и той же матрицей A и n столбцами матрицы с единицами на главной диагонали.) Составим расширенную матрицу для всех n векторов $\underline{b_i}$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & .. & .. & \dots & .. & .. \\ u_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и применим метод Гаусса как в пункте **3**. Справа получаем единичную диагональную матрицу, а слева – преобразованные вектора-столбцы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ .. & .. & \dots & .. & .. & \underline{u}_1^*, \underline{u}_2^*, \dots, \underline{u}_n^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

В частности, i-й столбец $\underline{u}_i^*$ есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} (u_j, \underline{u}_i^*) & = 0, \quad 1 \le j \le n, \ j \ne i, \\ (u_i, \underline{u}_i^*) & = 1. \end{cases}$$

Следовательно, *вектора-столбцы $\underline{u}_1^*$, $\underline{u}_2^*$, ..., $\underline{u}_n^*$ образуют базис двойственный к исходному базису.*

Пример 3. Пусть $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1) \in \mathbb{F}_2^3$. Найдем двойственный базис

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, двойственный базис состоит из столбцов последней матрицы, т.е. $u_1^* = (1,1,1)$, $u_2^* = (0,1,1)$, $u_3^* = (1,0,1)$. Проверьте условия на (u_i, u_j^*)!