

- 1 Принцип наименьшего действия
- 2 Законы сохранения
- 3 Интегралы движения и задача Кеплера
- 4 Дифференциальные формы
- 5 Уравнения Гамильтона
- 6 Скобки Пуассона

6.1 Еще раз о канонических уравнениях

Напомним еще раз, что из канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

тривиальным образом следует закон сохранения энергии

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2)$$

при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ при явно не зависящей от времени функции Гамильтона. Точно также можно написать вообще для *любой* функции на фазовом пространстве \mathcal{M}

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \quad (3)$$

где введено обозначение для *скобки Пуассона*

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (4)$$

любых двух функций $f = f(p, q)$ и $g = g(p, q)$ на \mathcal{M} . Сразу очевидно, что

- Для любой явно независимой от времени $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ функции на \mathcal{M} из

$$\{f, H\} = 0 \quad (5)$$

следует $\frac{df}{dt} = 0$, т.е. если функция находится в пуассоновой инволюции с Гамильтонианом, то она является интегралом движения – т.е. постоянной на траектории динамической системы.

- Для координат Дарбу скобки Пуассона имеют канонический вид

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, & i, j &= 1, \dots, N \\ \{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_j\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

6.2 Пуассонова геометрия фазового пространства

Вернемся к произвольному симплектическому многообразию \mathcal{M} , с невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой ω

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i, j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ d\omega &= 0, \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad \forall i, j, k \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим теперь гамильтонов поток на произвольном симплектическом многообразии \mathcal{M} , который мы уже записывали в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \quad \text{or} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (8)$$

где dH – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве, а $\Omega^{ij} = \omega_{ij}^{-1}$.

Очевидно, что это уравнение переписывается через скобки Пуассона в виде:

$$\dot{x} = \{x, H\}, \quad \{f, g\} = \sum_{i, j} \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i, j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \quad (9)$$

где $\Omega^{ij} = -\Omega^{ji}$ – компоненты так называемого пуассонова бивектора. Каков геометрический смысл полученной формулы? Посмотрим на коммутатор двух гамильтоновых векторных полей $[\xi_f, \xi_g]$, для произвольных функций f и g на \mathcal{M} . Имеем

$$[\xi_f, \xi_g] = [\xi_f^i \partial_i, \xi_g^j \partial_j] = (\xi_f^i \partial_i \xi_g^j - \xi_g^i \partial_i \xi_f^j) \partial_j \quad (10)$$

что пока означает лишь то, что векторные поля образуют алгебру Ли – в правой части стоит векторное поле $\xi(f, g) = \sum_k \xi^k(f, g) \partial_k$, где $\xi^k(f, g) = \sum_i (\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k)$. Если же векторные поля гамильтоновы, то

$$\xi^k(f, g) = \sum_i (\xi_f^i \partial_i \xi_g^k - \xi_g^i \partial_i \xi_f^k) = - \sum_l \Omega^{kl} \partial_l h \quad (11)$$

с некоторой функцией $h = h(f, g)$ на \mathcal{M} , т.е. гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли всех векторных полей. Более того, прямым вычислением (разобрать подробно на семинаре?) может быть доказана

Теорема: Коммутатор двух гамильтоновых векторных полей на \mathcal{M}

$$[\xi_f, \xi_g] = -\xi_h \quad (12)$$

является тоже гамильтоновым векторным полем, где

$$h = \{f, g\} = \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j g \quad (13)$$

есть ни что иное, как скобка Пуассона соответствующих функций.

Доказательство: В самом деле:

$$\begin{aligned} \xi^k(f, g) &= \sum_{i,j,n} (\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i (\Omega^{kn} \partial_n g) - (f \leftrightarrow g)) = \\ &= \sum_{i,j,n} (\Omega^{kn} \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i \partial_n g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \partial_j f \partial_n g - (f \leftrightarrow g)) = \\ &= \sum_{i,j,n} \Omega^{kn} \partial_n (\Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g) + \\ &+ \sum_{i,j,n} (-\Omega^{kn} \partial_n \Omega^{ij} \partial_j f \partial_i g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} (\partial_j f \partial_n g - \partial_j g \partial_n f)) \end{aligned} \quad (14)$$

Первый член в правой части дает буквально утверждение теоремы (12), (13), а для второй суммы (меняя немые индексы суммирования) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,n} (-\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} \partial_j f \partial_n g + \Omega^{ij} \partial_i \Omega^{kn} \partial_j f \partial_n g - \Omega^{in} \partial_i \Omega^{kj} \partial_j f \partial_n g) = \\ = - \sum_{j,n} \partial_j f \partial_n g \sum_i (\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} + \Omega^{ji} \partial_i \Omega^{kn} + \Omega^{ni} \partial_i \Omega^{jk}) \end{aligned} \quad (15)$$

Это слагаемое обнуляется в виду тождества

$$\sum_i (\Omega^{ki} \partial_i \Omega^{nj} + \Omega^{ji} \partial_i \Omega^{kn} + \Omega^{ni} \partial_i \Omega^{jk}) = 0 \quad (16)$$

представляющего собой квадратичное соотношение, эквивалентное (7), переписанное в обратных матрицах (проверить на семинаре!), к геометрическому смыслу которого мы еще вернемся.

У этой теоремы имеется важнейшее:

Следствие: Если две функции на \mathcal{M}

$$\{f, g\} = 0 \quad (17)$$

находятся друг с другом в инволюции относительно скобки Пуассона (иногда на жаргоне говорят – “пуассоново коммутируют”), то соответствующие векторные поля

$$[\xi_f, \xi_g] = 0 \quad (18)$$

коммутируют.

6.3 Свойства скобок Пуассона

По своему определению скобка Пуассона обладает рядом свойств, из которых многие – почти очевидны:

- Антисимметричность

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (19)$$

- Линейность

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2, g\} = a_1 \{f_1, g\} + a_2 \{f_2, g\}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \quad (20)$$

по каждому аргументу.

- “Тождество Лейбница”

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad (21)$$

которое распространяет пуассоновых соотношений для образующих на произвольные функции. Его можно действительно понимать как правило Лейбница, поскольку

$$\begin{aligned} \{f, h\} &= \sum_{i,j} \Omega^{ij} \partial_i f \partial_j h = \sum_i \xi_h^i(x) \partial_i f = \xi_h(f) \\ \{fg, h\} &= \xi_h(fg) = (\xi_h f)g + f(\xi_h g) \end{aligned} \quad (22)$$

- Наконец, менее тривиальным является *тождество Якоби*

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0 \quad (23)$$

для любых трех функций f , g и h на \mathcal{M} , которое эквивалентно тождеству Якоби

$$[\xi_h, [\xi_f, \xi_g]] + [\xi_g, [\xi_h, \xi_f]] + [\xi_f, [\xi_g, \xi_h]] = 0 \quad (24)$$

в соответствующей алгебре Ли гамильтоновых векторных полей.

Тождество (24) элементарно доказывается прямым вычислением, явно расписывая коммутаторы $[\xi_f, \xi_g] = \xi_f \cdot \xi_g - \xi_g \cdot \xi_f$, а затем – повторные коммутаторы, при этом следя за порядком. Эквивалентное ему тождество (23) в каком-то смысле менее тривиально, и обеспечивается квадратичным соотношением (16) на пуассонов бивектор. Таким образом, функции на фазовом пространстве – а в более общем случае на любом пуассоновом многообразии – образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

6.4 Скобки Пуассона и интегралы движения

Напомним, что интегралами движения называются функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \quad (25)$$

которые, в том случае когда явно не зависят от времени, определяются тем, что они находятся в пуассоновой инволюции с гамильтонианом H

$$\{f, H\} = 0 \quad (26)$$

Задача: доказать, что скобка пуассона двух интегралов движения является тоже интегралом движения. Указание: начать с более простом случае – явно не зависящих от времени интегралов, и воспользоваться тождеством Якоби.

Следствием этого является то, что в алгебре Ли функций на \mathcal{M} существует подалгебра интегралов движения.

Утверждение: Алгебра Ли группы симметрий системы (по теореме Нетер) изоморфна пуассоновой алгебре интегралов движения системы.

Действительно, вспомним, что согласно теореме Нетер симметрии генерируются векторными полями

$$X = \sum_{i=1}^N \chi^i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (27)$$

действующими на M , а соответствующие им интегралы движения имеют вид

$$I_X = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \chi^i(q) = \sum_i \chi^i(q) p_i \quad (28)$$

Скобка Пуассона двух таких интегралов ($I_Z = \sum_i \zeta^i(q) p_i$)

$$\begin{aligned} [I_X, I_Z] &= \sum_k \left(\frac{\partial I_X}{\partial q_k} \frac{\partial I_Z}{\partial p_k} - \frac{\partial I_X}{\partial p_k} \frac{\partial I_Z}{\partial q_k} \right) = \\ &= \sum_i p_i \sum_k \left(\zeta_k \frac{\partial \chi^i}{\partial q_k} - \chi_k \frac{\partial \zeta^i}{\partial q_k} \right) = -I_{[X, Z]} \end{aligned} \quad (29)$$

является интегралом движения, отвечающим коммутатору векторных полей в алгебре Ли группы нетеровской симметрии.

Примеры:

- Закон сохранения импульса для циклической координаты $\frac{dp_A}{dt} = 0$ генерируется сдвигом соответствующей координаты, т.е. векторным полем

$$X_A = \frac{\partial}{\partial q_A} \quad (30)$$

Соответствующий интеграл движения в гамильтоновой картине $I_A = p_A$. В случае нескольких циклических координат соответствующие векторные поля коммутируют

$$[X_A, X_B] = \left[\frac{\partial}{\partial q_A}, \frac{\partial}{\partial q_B} \right] = 0 \quad (31)$$

и этому отвечают нулевые канонических скобки Пуассона

$$\{I_A, I_B\} = \{p_A, p_B\} = 0 \quad (32)$$

соответствующих импульсов.

- Преобразования вращения, генерирующиеся векторными полями

$$V_i = -\epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \quad (33)$$

при $i, j, k = 1, 2, 3$ в \mathbb{R}^3 . Мы выводили, что соответствующие интегралы движения – компоненты вектора момента импульса

$$M_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k, \quad i = 1, 2, 3 \quad (34)$$

Задача: вычислить скобки Пуассона $\{M_i, q_j\}$, $\{M_i, p_j\}$ и $\{M_i, M_j\}$. Ответ очевиден.