Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы»

Вопросы билетов:

1. Понятие множества. Равенство множеств. Аксиомы равенства, пары. Булевы операции. Бесконечные объединения и пересечения множеств. Аксиома объединения.

2. Множество всех подмножеств данного множества и аксиома степени. Упорядоченные пары (по Куратовскому). Декартово произведение множеств. Отображения множеств, инъективность, сюръективность.

3. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Соответствие между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём. Фактормножество.

4. Равномощность множеств. Множество Y^X всех функций $f : X \to Y$. Биекция между $\mathcal{P}(X)$ и 2^X.

5. Натуральный ряд. Аксиома бесконечности и формальное определение множества натуральных чисел (по фон Нейману). Принцип математической индукции. Его вывод из определения натурального ряда. Принцип наименьшего числа и его вывод из принципа индукции.

6. Конечные множества. Принцип Дирихле: не существует инъекции из n-элементного множества в m-элементное множество при $m < n$. Его вывод из принципа индукции.

7. Существование и единственность функции натурального аргумента, определяемой по рекурсии. Определение сложения и умножения натуральных чисел.

8. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.

9. Счётные множества. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Счётность $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}^*$ (множества всех конечных последовательностей натуральных чисел).

10. Теорема Кантора: мощность $\mathcal{P}(X)$ строго больше мощности X. Равномощность $\mathbb{R}$ и $2^{\mathbb{N}}$. Несчётность $\mathbb{R}$.

11. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве.

12. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств. Изоморфизм линейно упорядоченных множеств. Примеры: $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$.

13. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.

14. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

15. Аксиома выбора. Лемма Цорна. Вывод леммы Цорна из аксиомы выбора.

16. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Вывод аксиомы выбора из теоремы Цермело.

17. Представление элемента вполне упорядоченного множества в виде $z+n$, где z — предельный элемент, а n — натуральное число. Если множество A бесконечно, то A равномощно $A \times \mathbb{N}$.

18. Сравнимость любых двух множеств по мощности. Объединение двух бесконечных множеств равномощно большему из них.

19. Если множество A бесконечно, то A равномощно $A \times A$. Бесконечное множество A равномощно A^* (множеству конечных последовательностей элементов A).