Досрочная сдача – часть IV

Задача 1. Докажите, что функция на отрезке, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1$, постоянна.

Задача 2. Постройте строго монотонную функцию на канторовом множестве, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем 2.

Задача 3. Докажите одномерную лемму Сарда: множество критических значений дифференцируемой функции на прямой имеет меру 0.

Элементы тейлоровского исчисления.

Задача 4. Пусть многочлен n-й степени приближает функцию $f \in C^n$ в нуле с точностью до $o(x^n)$. Докажите, что этот многочлен — многочлен Тейлора функции f.

Задача 5. Пусть $f, g \in C^n$, $T_{f,n}$ и $T_{g,n}$ — их многочлены Тейлора степени n в нуле. Докажите, что $T_{f,n} + T_{g,n}$ — многочлен Тейлора функции $f + g$, а $[T_{f,n} \cdot T_{g,n}]_n$ — многочлен Тейлора функции $f \cdot g$ степени n в нуле. Здесь $[P_N]_n$ — усечение степени n многочлена степени $N > n$:

$$P_N = \sum_0^N a_k x^k \Rightarrow [P_N]_n = \sum_0^n a_k x^k.$$

Задача 6. Выразите многочлен Тейлора степени n функции $\frac{1}{1+f}$ через многочлен Тейлора степени n функции f в нуле, если $f(0) = 0$.

Задача 7. Выразите многочлен Тейлора композиции $f \circ g$ через многочлены Тейлора f и g в нуле, если $f(0) = g(0) = 0$.

Задача 8. Найдите многочлен Тейлора третьей степени для функции f^{-1} в нуле, если $f \in C^3$, $f(x) = x + ax^2 + ax^3 + o(x^3)$.

Задача 9. Докажите, что если $f \in C^n$ и $f'(0) \neq 0$, то $f^{-1} \in C^n$ вблизи нуля.

Задача 10. Приведите пример бесконечно гладкой функции на прямой, имеющей неизолированный максимум; напишите формулу и нарисуйте график.

Задача 11. Докажите, что аналитическая функция на прямой имеет лишь изолированные экстремумы.

Задача 12. Как исследовать на экстремум в точке 0 аналитическую функцию на прямой?

Задача 13. Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

Задача 14. Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Задача 15. Пусть $f, g \in C^1$, причём $f(x) = x + o(x)$, $g(x) = x + o(x)$ при $x \to 0$.
Докажите, что если $f(x) - g(x) = Cx^k + o(x^k)$, $C \neq 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{f^{-1}(x) - g^{-1}(x)} = -1. \qquad (*)$$

b) Покажите, что без условия $f(x) - g(x) = Cx^k + o(x^k)$, $C \neq 0$ равенство $(*)$, вообще говоря, неверно. Указание: сдвиг аргумента $x \mapsto x + x^2$ у степенной функции не может, а у плоской функции может изменить ее асимптотику в нуле.