Материалы к семинарам по матанализу

7-я неделя (16–20.10.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 7. Замкнутые множества и непрерывные функции (11.10.2017)

1. Предельные точки
2. Замкнутые множества
3. Операции над замкнутыми и открытыми множествами
4. Непрерывные функции: определения и примеры
5. Арифметика непрерывных функций
6. Условие Липшица

Лекция 8. Непрерывные функции (18.10.2017)

1. Теорема о промежуточном значении
2. Максимум и минимум на отрезке
3. Равномерная непрерывность
4. Непрерывность сложной функции
5. Теорема об обратной функции

Лекция 9. Непрерывные функции и компактные множества (01.11.2017)

1. Функции на множествах
2. Компактные множества и критерий компактности
3. Непрерывные функции на компактных множествах

   ...

Примерные задачи семинаров 13 и 14

Рекомендуется не спешить переходить к нижеизложенным задачам, если еще остались неразобранные задачи из списка прошлой недели. Эти же задачи останутся на занятие на первой неделе после сессии.

Стремление к бесконечности

Задача 7.1. Сформулируйте определение понятия: а) $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; б) $f(x) \to y_0$ при $x \to \infty$.

Задача 7.2. Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет изолированный ноль в точке x_0. Докажите, с использованием определения из предыдущей задачи, что $\dfrac{1}{f(x)} \to \infty$ при $x \to x_0$.

Графики функций

Задача 7.3. Исследуйте на непрерывность и нарисуйте эскизы графиков функций

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$,

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x^2)}$,

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$,

г) $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin \pi x$, где $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$ обозначает целую часть числа x.

Теоремы о сложной и обратной функции

Задача 7.4. а) Выведите из теоремы об обратной функции существование и непрерывность функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
б) Докажите непрерывность на области определения функции $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$.
в) Докажите, что функция $f(x) = 2^x$, определёная при всех рациональных x, может быть продолжена до непрерывной функции на $\mathbb{R}$.
г) Докажите, что функция $f(x) = 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$ обратима, и обратная функция $f(x) = \log_2 x$ определена при $x > 0$ и непрерывна.

Задача 7.5. Постройте графики и исследуйте на непрерывность $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ и $g(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$.

Задача 7.6. Исследуйте на непрерывность сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, где

а) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sqrt{x}$,
б) $f(x) = \operatorname{sign} x$ и $g(x) = 1 + x^2$,
в) $f(x) = \operatorname{sign} x$ и $g(x) = x(1 - x^2)$,
г*) $f(x) = \operatorname{sign} x$ и $g(x) = 1 + x - \lfloor x \rfloor$.

Задача 7.7* Исследуйте на непрерывность сложную функцию $g(f(x))$, где

$$f : (0,1) \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \text{ рациональном,} \\ 2 - x, & \text{при } x \text{ иррациональном} \end{cases}$$
$$g : (0,2) \to \mathbb{R},$$
$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ 2 - y, & \text{при } 1 < y < 2 \end{cases}$$

Задача 7.8. Найдите обратную функцию для дробно-линейной функции

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

Задача 7.9. Может ли немонотонная функция иметь однозначную обратную функцию?

Задача 7.10. Найдите область определения и исследуйте на непрерывность функцию f; постройте эскиз ее графика.

а) $f(x) = \arcsin x$,
б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$,
в) $f(x) = \arcsin(\cos x)$,
г) $f(x) = \arcsin(2\cos x)$.

Равномерная непрерывность

Задача 7.11. Исследуйте на равномерную непрерывность в заданных областях функции

а) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$, $\quad (-1 \leq x \leq 1)$,
б) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$, $\quad (-2 < x < 2)$,
в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\quad (0 < x < \pi)$,
г) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $\qquad (-\infty < x < +\infty)$,
д) $f(x) = x \sin x$, $\quad (0 \leq x < +\infty)$,
е*) $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$, $\quad (0 \leq x < +\infty)$.

Компактные множества

Задача 7.12. Докажите, что любое компактное множество на прямой имеет вид $[a, b]$ или $[a, b] \setminus X$, где X – объединение не более чем счетного количества непересекающихся интервалов.

Задача 7.13. Докажите, что любая непрерывная функция, определенная на компактном множестве, ограничена и достигает своего минимума и максимума.

Задача 7.14. Докажите, что любая непрерывная функция, определенная на компактном множестве, равномерно непрерывна на нем.

Задача 7.15. Пусть замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}$ представимо в виде не более чем счетного объединения отрезков и точек. Докажите, что $\mathbb{R} \setminus X$ не плотно. Верно ли это, если снять условие замкнутости X?

Задача 7.16.* Приведите пример компактного множества на прямой, не представимого в виде объединения не более чем счетного количества отрезков и точек.