Листок 2

(годен до 15 ноября 2017 включительно)

Матрицы и определители

1. Вычислить определитель, у которого на главной диагонали стоит число λ, а все остальные его элементы равны μ.

2. Вычислить определитель, у которого на главной диагонали стоит число λ, $a_{i,j} = 1$, если $\mid i - j \mid = 1$. Все остальные его элементы равны нулю.

3. Пусть $b = (1, \ldots, 1)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $C = b^t a$. Доказать, что матрица $E + C$ тогда и только тогда обратима, когда $1 + a_1 + \ldots + a_n \neq 0$.

4. Что произойдет с обратной матрицей, если исходную матрицу повернуть на угол $\pi/2$ по часовой стрелке?

5. Квадратная матрица S с элементами из поля F, $\mathrm{char} F \neq 2$, называется симметрической, если $a_{ij} = a_{ji}$. Опираясь исключительно на технику элементарных преобразований, доказать существование такой невырожденной матрицы P с элементами из того же поля, что матрица PSP^t диагональна. Привести контр-пример над полем из двух элементов.

6. Доказать, что для любой матрицы $A_{m,n}$ существует такая матрица X, что $AXA = A$.

Линейные операторы: инвариантные подпространства и собственные значения

7. Найти все инвариантные подпространства линейного оператора, заданного в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Если A, B – это линейные операторы, то всякое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением оператора BA. Доказать.

9. Доказать,что если векторное пространство V обладает базисом, состоящим из собственных векторов линейного оператора A, то и всякое его инвариантное подпространство допускает базис, состоящий из собственных векторов.

10. Для того,чтобы линейный оператор $A : V \longrightarrow V$ удовлетворял условию $A^2 = A$ необходимо и достаточно, чтобы он был проектированием пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 (это означает, что все пространство есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2, а оператор A каждый вектор $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ отображает в вектор v_1).