КУРС АЛГЕБРЫ

Задачи для подготовки к работе 27 октября.

Задача 1. Рассмотрим множество матриц

$$M = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \}.$$

a) Показать, что умножение матриц является ассоциативной бинарной операцией на M.

b) Доказать, что в $(M, \cdot)$ нет нейтрального слева элемента.

c) Найти все нейтральные справа элементы.

4) Пусть e_r – нейтральный справа элемент. Доказать, что любой элемент $g \in M$ обладает обратным слева для этого нейтрального справа, т.е. $\forall\ g \in M\ \exists\ h \in M\ :\ h \cdot g = e_r$. (Ср. с Задачей 1 из Листка 2.)

Задача 2. 1) Если элемент $abc \in G$ имеет конечный порядок, то

$$\operatorname{ord}(abc) = \operatorname{ord}(bca) = \operatorname{ord}(cab), \quad \forall\, a,\ b,\ c \in G.$$

2) Пусть G – группа порядка p^n, где p – простое число. Доказать, что G содержит элемент порядка p.

3) Доказать, что любая группа порядка 4 изоморфна циклической группе C_4 или группе $(\mathbb{F}_2^2, +)$.

4) Найти все подгруппы в группах C_4, C_8, $(\mathbb{F}_2^2, +)$, $(\mathbb{F}_2^3, +)$, C_{2^n} и $(\mathbb{F}_2^n, +)$

5) Показать, что любая бесконечная группа содержит бесконечное число различных подгрупп.

Задача 3. Пусть G – группа, H – подгруппа G.

1) Доказать, что $a^{-1}Ha$ – подгруппа G для любого $a \in G$.

3) Доказать, что подгруппы H и $a^{-1}Ha$ изоморфны, в частности, $|H| = |a^{-1}Ha|$.

4) Установить взаимно однозначное соответствие между левыми смежными классами по подгруппам H и $a^{-1}Ha$ в группе G.

5) Пусть H – единственная подгруппа порядка d в группе G. Доказать, что она нормальная.

Задача 4. $GL_2(\mathbb{F}_2)$. Обозначим ненулевые вектора $\mathbb{F}_2^2$ через u, v и w

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Какую перестановку ненулевых векторов задает элемент $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{F}_2)$?

2) Какой элемент $M \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ задает перестановку $\left(\begin{smallmatrix} u & v & w \\ w & u & v \end{smallmatrix}\right)$?

3) Найти все смежные классы в группе $GL_2(\mathbb{F}_2)$ по подгруппе, порожденной элементом $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

4) Показать, что в $GL_2(\mathbb{F}_2)$ есть единственная подгруппа порядка 3. Найти все смежные классы по этой подгруппе.

5) Найти центр и все нормальные подгруппы группы $GL_2(\mathbb{F}_2)$. Аналогичный вопрос для группы S_3.

Задача 5. Группа Гейзенберга (см. Семинар 3). Найти центр Z группы $H_3(\mathbb{F}_2)$ и факторгруппу $H_3(\mathbb{F}_2)/Z$.

Задача 6. 1) Доказать, что существует инъективный гомоморфизм группы $GL_3(\mathbb{F}_2)$ в группу перестановок S_7.

2) Рассмотрим подгруппы группы P из Задачи 5-3) Семинара 3:

$$N = \{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_2)\} < P,$$

$$G = \{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_2)\} < P.$$

1) Доказать, что $N \cong \mathbb{F}_2^2$ и $G \cong GL_2(\mathbb{F}_2)$.

2) Какая из подгрупп N, G будет нормальной в группе P?

3) Найти факторгруппу группы P по этой нормальной подгруппе.

Обязательно разобрать и понять решения задач про порядок элементов и первые задачи про факторгруппы Семинара 4: NN 1, 2, 4-4. Это материал будет разобран в лекции 19 октября и возможном дополнительном семинаре-консультации в субботу 21 октября.