КУРС АЛГЕБРЫ, Листок 2, срок сдачи до 3 ноября.

Задача 1. Пусть $(G,*)$ – ассоциативный закон композиции, удовлетворяющий двум условиям:

$$1)\ \exists\ e_l \in G : \forall\ a \in G : e_l * a = a, \qquad 2)\ \forall\ a \in G\ \exists\ b \in G :\ b * a = e_l.$$

Доказать, что $(G,*)$ – группа.

Указания. Показать, что

1)$^+$ $b * a = e_l$ влечет $a * b = e_l$;

2) существует единственный нейтральный слева элемент;

3) $\forall\ a \in G : a * e_l = a$;

4) каждый элемент обратим, т.е. $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G :\ b * a = a * b = e_l$.

Задача 2. 1) Найти, с точностью до изоморфизма, все группы, обладающие ровно тремя подгруппами.

Указание. Показать, что группа, имеющая ровно три подгруппы, является конечной и циклической.

2) Докажите, что любая некоммутативная группа содержит по крайней мере шесть различных подгрупп.

Задача 3. 1) Найти центр группы S_3.

2) Доказать, что любая некоммутативная группа порядка 6 содержит элементы порядка 2 и 3.

3*) Доказать, что любая некоммутативная группа порядка 6 изоморфна группе перестановок S_3.

Задача 4. Пусть G – конечная группа такая, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Доказать, что

1) порядок G равен 2^n, где $n \geq 0$.

2) G изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{F}_2^n, +)$.

3) Найти число подгрупп группы G.

Задача 5. Найти элемент максимального порядка в группе $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

Задача 6*. Пусть $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ и $\varphi : G \to G'$ – гомоморфизм, такой что $\varphi(H) \subset H'$.

1) Доказать, что отображение $\bar{\varphi}(aH) = \varphi(a)H'$ определено корректно (т.е. зависит только от класса aH в факторгруппе G/H) и задает гомоморфизм факторгрупп $\bar{\varphi} : G/H \to G'/H'$.

2) Найти $\operatorname{Ker}\bar{\varphi}$, $\operatorname{Im}\bar{\varphi}$ и фактор-группу $(G/H)/(\operatorname{Ker}\bar{\varphi})$.

3) Вывести из 2) вторую и третью теоремы о гомоморфизмах групп.