03.10.2017 **Классическая теория поля** =1=

Лекция № 4

На прошлой лекции мы получили, что линейные неоднородные преобразования между наборами 4-координат одного и того же события в разных инерциальных системах отсчёта

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} := \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

сохраняют интервал между событиями

$$(\Delta S)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} g_{\mu\nu} := \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} g_{\mu\nu}$$

если вещественные 4×4 матрицы $\Lambda = \|\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\|$ удовлетворяют требованию

$$\boxed{\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{0,1,2,3\}.$$

В записи $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ первый (верхний) индекс μ нумерует строки матрицы, а второй (нижний) индекс ν нумерует её столбцы. Поэтому в матричном виде имеем $\boxed{\Lambda^{T} g \Lambda = g}$, где

Λ^T обозначает транспонирование матрицы Λ.

Матрица метрического тензора g имеет вид $g = \|g_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Для обратной матрицы введем обозначение матричных элементов с <u>верхними</u> индексами:

$$g^{-1} = \|g^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu}$$

Из матричного вида очевидны тождества

$$g = g^T$$
$$g = g^{-1}$$

Кроме того:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g$$

В матричном виде:

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = (g^{-1})^{\mu\alpha} (\Lambda^T)_\alpha{}^\beta g_{\beta\nu} = g^{\mu\alpha} \Lambda^\beta{}_\alpha g_{\beta\nu}}$$

Напомним, что по повторяющимся разновысоким индексам подразумевается суммирование по всему множеству их значений от 0 до 3. =3=

$\boxed{\text{Зам.}}$ Необходимость различать высоту расположения индекса связана с тем, что координаты x^μ и <u>производные</u> по координатам $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ по-разному преобразуются относительно преобразований Лоренца:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}_{\text{"цепное правило"}} = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left((\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta x'^\beta\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} =$$

$$= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Удобно считать $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ объектом с нижним индексом: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$,

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \equiv \partial'_\mu.$$

Тогда
$$\begin{cases} \partial'_\mu = \partial_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \\ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha . \end{cases}$$

Введём удобное обозначение

$$x_\mu := g_{\mu\alpha} x^\alpha \Rightarrow x^\mu = g^{\mu\alpha} x_\alpha$$

☑ Координаты x_μ преобразуются так же как и $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

<u>Доказательство:</u>

$$x'_\mu := g_{\mu\alpha} x'^\alpha = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\sigma} x_\sigma.$$

Но $g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\sigma} = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$

Таким образом: $x'_\mu = x_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu$ — такой же закон, как и у производных ∂_μ.

~~Раз~~ В этих обозначениях квадрат интервала $(\Delta s)^2 = \Delta x^\mu \Delta x^\nu g_{\mu\nu} = \Delta x^\mu \Delta x_\mu$. И вообще, суммирование 2-х разновысоких индексов (будем эту операцию называть свёрткой) — инвариантная операция относительно преобразований Лоренца: $x^\mu y_\mu = x'^\mu y'_\mu$

$x^\mu \partial_\mu = x'^\mu \partial'_\mu$ и т.д.

(x^μ и y^μ — 2 4-вектора)

Рассмотрим чуть подробнее структуру матриц из группы Лоренца.

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1, \forall \Lambda.$$

Множество матриц с $\det \Lambda = 1$ будем обозначать $\{\Lambda_+\}$, а с $\det \Lambda = -1$ — $\{\Lambda_-\}$. Множество $\{\Lambda_+\}$ — подгруппа, а $\{\Lambda_-\}$ — нет.

Есть преобразование Лоренца $i_s \in \{\Lambda_-\}$ — отражение пространственных осей. Его матрица совпадает с g:

$$i_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(x^0, \vec{x}) \xmapsto{i_s} (x^0, -\vec{x}).$$

$\boxed{У}$ $\forall \Lambda_- \exists \Lambda_+ : \Lambda_- = i_s \cdot \Lambda_+$

В силу обратимости всех матриц это биекция подгруппы $\{\Lambda_+\}$ и множества $\{\Lambda_-\}$ и вся группа Лоренца есть дизъюнктное (с пустым пересечением) = б = объединение $\{\Lambda_+\}$ и $\{\Lambda_-\}$.

$$\{\Lambda\} = \{\Lambda_+\} \sqcup \{\Lambda_-\}$$

$\boxed{\text{V}}$ Для $\forall$ преобразования Лоренца

$$|\Lambda^0{}_0| \geq 1 \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \dots \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

<u>Доказательство</u>:

Положим в определяющем соотношении для Λ: $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}$

$\alpha = \beta = 0$. Учитывая $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ получим:

$$\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_0 - \Lambda^2{}_0 \Lambda^2{}_0 - \Lambda^3{}_0 \Lambda^3{}_0 = g_{00} = 1$$

Таким образом, имеем:

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2.$$

В силу <u>вещественности</u> матричных элементов $\Lambda^\mu{}_\nu$ отсюда следует $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1$. То есть, или $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ или $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

[О] Преобразования Лоренца с $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ называются ортохронными, а с $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ – антиортохронными
обозначения: $\{\Lambda\uparrow\}$ и $\{\Lambda\downarrow\}$ соответств.

[У] Ортохронные преобразования образуют подгруппу в группе Лоренца $\{\Lambda\uparrow\}$.

[Зам.] Доказательство этой теоремы не очень сложно, но мы его не будем приводить (можно посмотреть в книжке Шапиро и др.). Отметим только, что для четырёх-векторов Минковского с <u>положительным</u> квадратом:

$$X \cdot X := X^\mu X_\mu = (X^0)^2 - (\vec{X})^2 > 0$$

вводится понятие <u>положительного вектора</u>: X^μ с $X^\mu X_\mu > 0$ – положительный, если $X^0 > 0$ (и отрицательный, если $X^0 < 0$). Так вот, ортохронные преобразования переводят любой положительный вектор опять в положительный. Если это доказать, то

групповое свойство в $\{\Lambda\uparrow\}$ ~~будет~~ =8=
тривиально следовать из этого
утверждения.

Есть специальное антиортохронное
преобразование $i_t \in \Lambda\downarrow$:

$$i_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — отражение времени.

$$(x^0, \vec{x}) \xmapsto{i_t} (-x^0, \vec{x}).$$

$\boxed{\text{У}}$ $\forall\ \Lambda\downarrow \in \{\Lambda\downarrow\}\ \exists\ \Lambda\uparrow \in \{\Lambda\uparrow\}$:

$$\Lambda\downarrow = i_t \Lambda\uparrow.$$

~~Нужна~~ Наконец, можно определить
преобразование полного отражения.

$$i_{st} = i_t \cdot i_s = -\mathbb{1}$$

Тогда группа Лоренца будет состоять
из четырёх компонент

$$\{\Lambda\} = \{\Lambda_+\uparrow\} \sqcup \{\Lambda_+\downarrow\} \sqcup \{\Lambda_-\uparrow\} \sqcup \{\Lambda_-\downarrow\}$$

Компонента $\Lambda_+\uparrow$ (и только она) содер-
жит единичное преобразование и

образует подгруппу $\{\Lambda_+^\uparrow\}$, которая носит название <u>ограниченной</u> группы Лоренца. Все остальные компоненты получаются из $\{\Lambda_+^\uparrow\}$ умножением на <u>дискретные</u> преобразования i_s и i_t (<u>биективное</u> соответствие).

$$\{\Lambda\} = \begin{array}{|c|c|} \hline \Lambda_+^\uparrow & \Lambda_-^\uparrow \\ \hline \Lambda_-^\downarrow & \Lambda_+^\downarrow \\ \hline \end{array} \;\Big\downarrow i_t$$

$$\xrightarrow{\quad i_s \quad}$$

Далее мы будем рассматривать только ограниченную группу Лоренца и использовать для неё обозначение $\{\Lambda\}$, поскольку только ~~для~~ относительно преобразований из этой группы есть инвариантность законов природы. Нарушение "зеркальной симметрии" i_s и ~~[illegible]~~ "обращения времени" i_t найдены в середине 20-го века в процессах распадов элементарных частиц.

Прежде, чем двигаться дальше, рассмотрим важный пример преобразований Лоренца. А именно, рассмотрим общий вид преобразования, которое затрагивает только временную компоненту x^0 и одну из пространственных компонент, например, x^1. Временно обозначим $x^1 = x$, $x^2 = y$ и $x^3 = z$. То есть, давайте найдём вид преобразования Лоренца, которое оставляет на месте y и z:

$$x^\mu \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^0 \\ x' \\ y \\ z \end{pmatrix} = x'^\mu = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\Lambda}_{2\times 2}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Поскольку $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$, то

$$(x^0)^2 - x^2 = (x'^0)^2 - (x')^2.$$

$\Rightarrow$ общий вид $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Знак – выбран для удобства дальнейшей интерпретации.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Легко убедиться, что такое преобразование удовлетворяет свойству $\Lambda^T g \Lambda = g$.

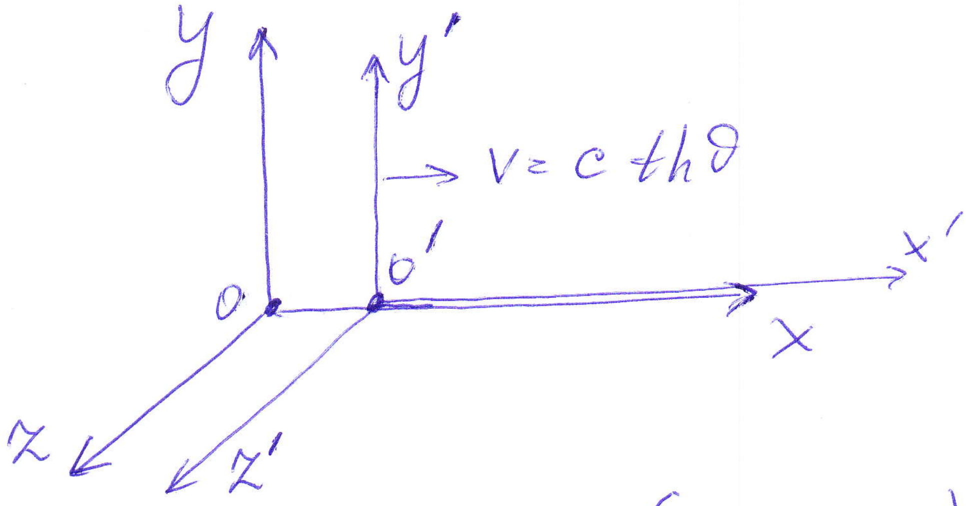
$\boxed{\text{V}}$ Преобразование вида

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \operatorname{ch}\vartheta - x \operatorname{sh}\vartheta \\ x' &= x \operatorname{ch}\vartheta - x^0 \operatorname{sh}\vartheta \\ y' &= y \qquad z' = z \end{aligned}\right\} \quad (\text{A})$$

называется <u>бустом</u> вдоль оси X и описывает переход к координатам событий, отмечаемым наблюдателем O'. Система отсчёта O' имеет оси пространственных координат сонаправленные с осями системы O [где координаты $(x^0, \vec{x})$) и её начало отсчёта O' движется вдоль оси OX со скоростью

$$V = c \operatorname{th}\vartheta.$$

В момент $x^0 = ct = 0$ начала O и O' - совпадают:



Параметр $\theta \in (-\infty, +\infty)$ называется <u>быстротой</u> (в отличие от физической скорости тела O', быстрота θ не ограничена).

Для доказательства ~~[illegible]~~ вычислим скорость точки O' в её собственной системе отсчёта (она равна 0, т.к. точка O' − начало координат ~~[illegible]~~ системы O' и, по определению, покоится в этой системе). Дифференцируя соотношения (A), получаем

$$\left.\begin{aligned} dx'^0 &= c\,dt' = (c\,dt)\,\mathrm{ch}\,\theta - dx_{o}\,\mathrm{sh}\,\theta \\ dx'_{o} &= dx_{o}\,\mathrm{ch}\,\theta - (c\,dt)\,\mathrm{sh}\,\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dx'_{o}}{c\,dt'} = \frac{1}{c} v'_{o} = \frac{dx_{o}\,\mathrm{ch}\,\theta - c\,dt\,\mathrm{sh}\,\theta}{c\,dt\,\mathrm{ch}\,\theta - dx_{o}\,\mathrm{sh}\,\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx_{o}}{dt} = c\,\mathrm{th}\,\theta.$$

Но $\frac{dx_{0'}}{dt}$ – это скорость тела $0'$ с точки зрения наблюдателя 0. Таким образом $V = V_{0'} = c\,th\,\theta$ – это скорость начала $0'$ относительно 0. Пользуясь этим обозначением, можно выразить $sh\,\theta$ и $ch\,\theta$ через V:

$$sh\,\theta = \frac{th\,\theta}{\sqrt{1 - th^2\theta}} = \frac{V/c}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$ch\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Поэтому преобразование буста (переход в систему отсчета, двигающуюся со скоростью V ($V>0$ если в "+"-направлении оси Ox и $V<0$, если против оси Ox)) принимают вид:

$$(*) \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Легко проверить, что $\begin{pmatrix} ch\,\theta & -sh\,\theta \\ -sh\,\theta & ch\,\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch\,\theta & sh\,\theta \\ sh\,\theta & ch\,\theta \end{pmatrix}$,

поэтому обратные преобразования

отличаются только знаком:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (*^{-1})$$

Это вполне естественно, так как с точки зрения O' наблюдатель O движется вдоль оси OX', только в противоположную сторону (т.е. $V \to -v$).

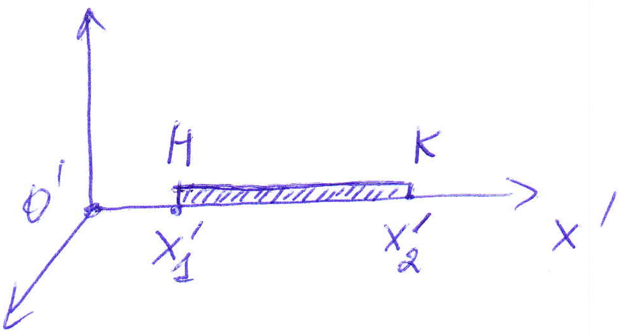
Ещё раз уточним смысл этих преобразований: если с точки зрения наблюдателя O (неподвижная или лабораторная система отсчета) некоторое событие A произошло в точке с координатами (x, y, z) в момент t (по часам наблюдателя O), то наблюдатель O' зарегистрирует это же событие A в точке (x', y, z) и в момент t' (по часам O').

Рассмотрим некоторые следствия ~~фор~~ формул (*).

Релятивистское сокращение длины.

Пусть в системе O' покоится стержень, расположенный вдоль оси Ox' и наблюдатель O' регистрирует его концы в точках x_1' и x_2'. С точки зрения O' длина стержня:

$$l' = x_2' - x_1' > 0.$$



Н – начало стержня
К – конец стержня

Если наблюдатель O (лабораторная система) захочет измерить длину этого стержня, он должен отметить положение концов стержня на своей оси Ox в один и тот же момент времени t по своим часам. Разность этих меток даст длину стержня.

Итак, в лабораторной системе О фиксируются 2 события в один и тот же момент t:

$$H: (x_1, t) \quad K: (x_2, t) \Rightarrow l = x_2 - x_1$$ – измеренная наблюдателем О длина стержня.

Пересчитаем координаты этих событий в систему О':

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Мы нашли, что наблюдатель О измерит значение $l = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < l'$!

$\boxed{\text{Зам.}}$ Этот эффект делает бессмысленным определение твердого тела нерелятивистской Ньютоновой механики как "системы материальных точек, расстояния между которыми фиксированы и не меняются с течением времени".

В чём же причина такого результата измерения ~~дл~~ длины?
В относительности понятия одновременности.
С точки зрения наблюдателя O моменты фиксации начала Н и конца К стержня были одинаковы (т. е., события Н: (x_1, t) и К: (x_2, t) одновременны с точки зрения O).
Вычислим, однако, временные координаты этих событий с точки зрения O′:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(т. к. $t_1 = t_2 = t$)

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

И мы видим, что

$$t_1' - t_2' = \frac{\frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{V}{c^2}\frac{l}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}l' > 0 \ !$$

С точки зрения O′ мы не одновременно отметили начало и конец стержня. t_1' - момент отмечания конца стержня с точки зрения O′ - ~~прои~~ наступил позже отмечания конца. Т.е. для O′ наше измерение (в системе O) было "жульническим": мы сначала отметили конец ("голову" движущегося стержня), затем подождали время $\frac{v}{c^2}l'$, за которое начало стержня приблизилось к отметке "головы" и только после этой задержки отметили положение начала стержня. Неудивительно, что расстояние между нашими метками оказалось меньше, чем "настоящая" длина покоящегося стержня. Итак, одновременные с точки зрения системы O события Н и К оказались не одновремен-

ньше с точки зрения O':
Событие K произошло раньше H.
Более того, для наблюдателя O'', движущегося со скоростью $-V$ вдоль OX относительно O раньше произошло событие H.

— " —

<u>Сокращение промежутков времени.</u>

Пусть теперь в системе O' в одной и той же точке x' происходят 2 события, разделённые промежутком времени $\Delta t'$ по ~~...~~ часам системы O'. То есть, наблюдатель O' фиксирует 2 события

$$A:(x', t_1') \text{ и } B:(x', t_2')$$

$$t_2' - t_1' = \Delta t'.$$

С точки зрения лабораторной системы O, координаты этих событий находятся по формулам $(*^{-1})$:

$$A: \begin{cases} x_1 = \dfrac{x' + v t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_1 = \dfrac{t_1' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x_2 = \dfrac{x' + v t_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_2 = \dfrac{t_2' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

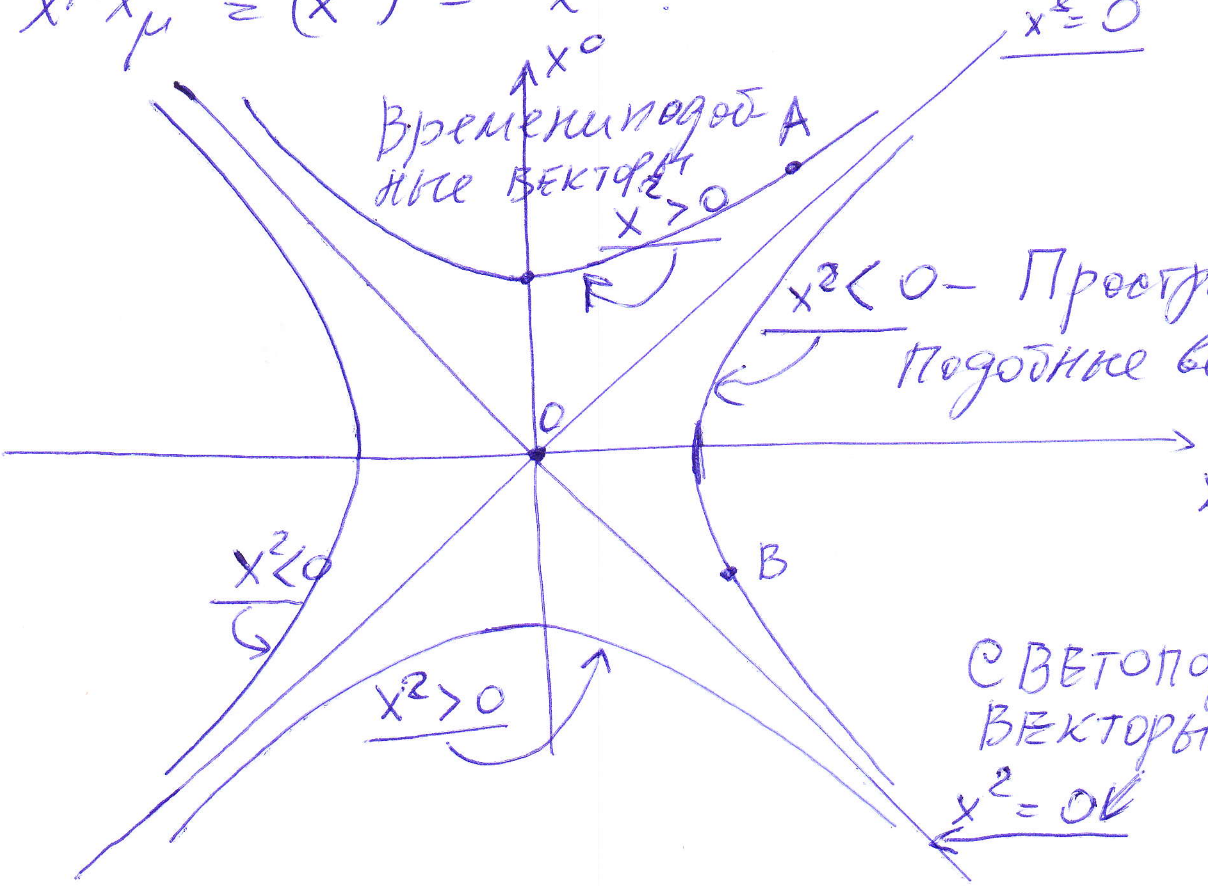
Временной промежуток между A и B по часам наблюдателя O:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Наблюдатель O придёт к выводу, что между событиями A и B прошло больше времени, чем это отметил наблюдатель O'.

$\boxed{O}$ Время, прошедшее между событиями, в системе отсчета, где эти события произошли в одной точке пространства $\mathbb{R}^3$ называется Собственным временем.

Построим на плоскости $(x;x^0)$ множества точек, координаты которых ~~[illegible]~~ обладают одинаковым релятивистским квадратом: $x^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$:



Эти кривые можно интерпретировать как множества всевозможных пар координат (x, x^0), которые может иметь одно событие с точки зрения различных инерциальных систем отсчёта, движущихся вдоль оси Ox со всеми возможными скоростями $-c < v < c$.

Например, событие A на рисунке происходит в момент $t_A = \frac{x_A^0}{c}$ в точке x_A. Но $\exists$ система отсчёта, в которой A случится в начале координат $x_A' = 0$ в момент $t_A' < t_A$ (собственная система отсчёта).

А вот событие B никогда нельзя поместить в начало координат, но зато его временную компоненту t_B можно выбором системы отсчёта сделать как ≥ 0, так и < 0.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Все времена и координаты отсчитываются от некоторого "референтного события" O, место свершения которого выбрано за начало пространственных координат, а момент t_0, когда оно случилось, выбран за начало отсчёта времени. Таким образом, событие B ~~никогда~~ никакому наблюдателю не увидится произошедшим в той же точке, где случилось событие О, но будут наблюдатели, которые зарегистрируют В раньше О (по их часам), будут и те, кто зарегистрирует В позже О (тоже по своим часам) — как это было в нашем примере с измерением стержня.

А вот для события А все наблюдатели сойдутся во мнении, что ~~А~~ случилось позже О: $t_A > t_O = 0$.

Мы приходим к выводу, что события, разделённые пространственно подобным интервалом $(\Delta S^2) < 0$, не могут ~~быть~~ находиться в причинно-следственной связи (как события В и О), поскольку следствие всегда наступает после причины. События, которые могут влиять друг на друга должны разделяться времениподобным или светоподобным интервалом $(\Delta S)^2 \geq 0$.

Закон сложения скоростей

Пусть лабораторный наблюдатель O и движущийся относительно него наблюдатель O′ регистрируют движение материальной точки A (каждый в своей системе отсчета и по своим часам). Наблюдатель O зафиксирует закон движения

$\vec{x}_A(t) = (x_A(t), y_A(t), z_A(t))$, а наблюдатель O′ — закон движения

$\vec{x}\,'_A(t') = (x'_A(t'), y'_A(t'), z'_A(t'))$.

Наша задача найти связь трехмерных векторов скорости точки A:

$\frac{d\vec{x}_A}{dt} = \vec{v}_A$ и $\frac{d\vec{x}\,'_A}{dt'} = \vec{v}\,'_A$, регистрируемых наблюдателями O и O′. Воспользуемся $(\mathcal{X}^{-1})$:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

Отсюда получаем компоненты
скорости точки A в системе O:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'+V\,dt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'} = \left\{\begin{array}{l}\text{делим числи-}\\ \text{тель и знаме-}\\ \text{натель на } dt'\end{array}\right\}$$

$$= \frac{v'_x+V}{1+\frac{V}{c^2}v'_x},$$ где $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ – скорость вдоль оси Ox' с точки зрения O'.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

Мы видим, что при $\frac{V}{c} \ll 1$ (нерелятивистский предел) получаются формулы классической кинематики. Кроме того, видно, что $|\vec{v}|$ не превосходит c при $\forall\ |\vec{v}'|<c$ и $\forall$ скоростях $|V|<c$. Пусть, например, движение A происходит только вдоль оси Ox (для простоты), т.е.

$v'_y = v'_z = v_y = v_z = 0.$

Если $v'_x = \frac{c}{2}$ и $V = \frac{c}{2}$, то с точки зрения классической механики:

$$v_x = v'_x + V = c.$$

Наша формула даёт иной ответ:

$$v_x = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{c^2}{4c^2}} = \frac{4}{5}c$$ – только 0,8 от классического ответа.

Если же $v'_x = c$, то

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2} \cdot c} = c \text{ для } \underline{\forall V}.$$

Это, конечно, находится в полном согласии с нашими постулатами о постоянстве скорости света в любой системе отсчета и демонстрирует непротиворечивость всех формул.