

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА – 2017
ЛИСТОК 2

1. Определите форму орбит для частицы в центральном поле $U(\vec{x}) = |\vec{x}|^2$.
2. Найдите время падения частицы массы m с расстояния R в центр поля $U(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}$. Начальная скорость частицы равна нулю.
3. Найдите закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \alpha \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \right)^2.$$

4. Найдите интегралы движения для частицы, двигающейся в однородном поле

$$U(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}), \quad \vec{a} = \text{const.}$$

5. Докажите, что вектор $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{M} - \frac{\alpha \vec{x}}{|\vec{x}|}$ является интегралом движения для частицы в кулоновском поле $U(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}$.

6. Как известно, для частицы в кулоновском поле $U(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}$ существует интеграл движения

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{M} - \frac{\alpha \vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Вычислите скобки Пуассона $\{A_i, M_j\}$.

7. Докажите, что значение любой функции координат и импульсов $f(p(t), q(t))$ выражается через значения p и q в момент $t = 0$ формулой

$$f(p(t), q(t)) = f + t\{H, f\} + \frac{t^2}{2!}\{H, \{H, f\}\} + \dots,$$

где $f = f(p(0), q(0))$, а $H = H(p, q)$ – функция Гамильтона.