

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА – 2017
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. Варьированием действия выведите уравнения движения и граничные условия для лагранжиана $L = \dot{q}^4 - q^4$.

2. Выпишите уравнение движения системы, функция Лагранжа которой

$$L = \frac{1}{2}e^{\alpha t} (\dot{q}^2 - kq^2).$$

3. Проинтегрируйте уравнения движения системы с лагранжианом

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2) + bq_1q_2$$

4. На плоскости R^2 с координатами (x, y) дана скобка $\{x, y\} = 1$. Вычислите эту скобку в полярных координатах.

5. Найдите производную Ли вдоль поля $X = x\partial_y - y\partial_x$ от дифференциальных форм $x dx + y dy$, $dx \wedge dy$.

6. Найдите функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\omega^2 q^2}{2} - \alpha q^4 + \beta q^2 \dot{q}^2.$$

7. Найдите функцию Лагранжа, если функция Гамильтона равна

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - (\vec{p}, \vec{a}), \quad \vec{a} = \text{const}.$$

8. Найдите интегралы движения для частицы, двигающейся в однородном поле

$$U(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}), \quad \vec{a} = \text{const}.$$

9. Вычислите скобки Пуассона $\{(\vec{a}, \vec{M}), (\vec{b}, \vec{M})\}$, где \vec{M} – вектор момента импульса, а \vec{a}, \vec{b} – постоянные векторы.

10.* Скобка Пуассона-Дринфельда на пуассоновом многообразии – группе $GL(2)$, т.е. для матриц

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2) \tag{1}$$

задается явными формулами

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= ab & \{a, c\} &= ac & \{b, c\} &= 0 \\ \{d, b\} &= -db & \{d, c\} &= -dc & \{a, d\} &= 2bc \end{aligned} \tag{2}$$

– Найти функции Казимира для этой скобки;

– Найти координаты Дарбу, и выразить через них матричные элементы матрицы (2).