07.10.2017 | Классическая теория поля

Лекция №5

На прошлой лекции мы познакомились с важным частным примером преобразования Лоренца - бустом вдоль оси OX и рассмотрели некоторые следствия такого преобразования: относительность длины стержня, длительности промежутков времени и релятивистский закон сложения скоростей.

Обратимся теперь к преобразованиям Лоренца общего вида. Напомним, что мы работаем с подгруппой ограниченных преобразований $\Lambda_+^\uparrow$: $\Lambda \in \Lambda_+^\uparrow \Leftrightarrow \begin{cases} \det \Lambda = 1 \\ \Lambda^0{}_0 \geq 1 \end{cases}$

Группа Лоренца является примером так называемых групп Ли, то есть групп, множество элементов которых образует гладкое (комплексное или вещественное) многообразие, а групповые операции (умножение и взятие обратного) являются диффеоморфизмами этого многообразия. Размерность многообразия (мы будем рассматривать случай конечномерных групп Ли) =2= дает число независимых параметров (координат на многообразии) определяющих групповые элементы.

Практический вывод для наших целей такой: матрицы Λ, образующие множество преобразований Лоренца, гладко зависят от некоторого набора параметров (вещественных) $\{\varepsilon^i\}_{1\le i\le n}$, кроме того, будем считать $\Lambda(\varepsilon)\big|_{\varepsilon^i=0} = \mathbb{1}$.

Размерность группы Ли совпадает с размерностью её алгебры Ли - касательного пространства в единичном элементе:

$$T\Lambda_{\mathbb{1}} = \left\{ \frac{\partial\Lambda(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^i}\Big|_{\varepsilon=0} \right\}.$$

Например, матрицы бустов вдоль оси Ox, рассматривавшиеся на прошлой лекции

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} ch\,\theta & -sh\,\theta & 0 & 0 \\ -sh\,\theta & ch\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- однопараметрическая подгруппа группы Лоренца. Этим преобразованиям отвечает одномерное линейное подпространство в алгебре Ли группы Лоренца. Алгебра Ли есть алгебра 4×4 матриц ~~над~~, структуру которых мы должны определить.

Заметим, что для буста вдоль Ox:

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K^1$$

– так называемый генератор бустов. Это базисный вектор одномерного линейного пространства $\{\vartheta K^1\}$ и произвольный буст вдоль оси Ox получается <u>экспоненциальным</u> ~~преобразов~~ <u>отображением</u> из алгебры Ли в группу Ли:

$$\Lambda(\vartheta) = \exp(\vartheta K^1)$$

$\boxed{\text{Упр}}$. Проверьте этот факт.

Очевидно, что достаточно убедиться в равенстве:

$$\exp\left(\vartheta\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta \\ -\operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ch}\vartheta = \dfrac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}$, $\operatorname{sh}\vartheta = \dfrac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2}$.

Итак, будем считать, что $\Lambda = \exp(\varepsilon M)$ и разложим это выражение в ряд по параметрам ε вблизи $\varepsilon = 0$:

$$\Lambda = \mathbb{1} + (\varepsilon M) + o(\varepsilon)$$

Воспользуемся определяющим соотношением на матрицы Λ:

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\mathbb{1} + (\varepsilon M)^T + o(\varepsilon)\right) g \left(\mathbb{1} + (\varepsilon M) + o(\varepsilon)\right) = g$$

$$\Downarrow$$

$$g + (\varepsilon M)^T g + g(\varepsilon M) + o(\varepsilon) = g$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\varepsilon M)^T g + g(\varepsilon M) = 0}$$

Это равенство определяет структуру алгебры Ли группы Лоренца.

Запишем матрицу (εM) в блочном виде:

$$\varepsilon M = \left(\begin{array}{c|ccc} a & b^1 & b^2 & b^3 \\ \hline c^1 & & & \\ c^2 & & R_{3\times3} & \\ c^3 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & b_{1\times3} \\ \hline c_{3\times1} & R_{3\times3} \end{array}\right)$$

Тогда равенство $(\varepsilon M)^T g = -g(\varepsilon M)$ принимает вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & -C^T_{1\times 3} \\ \hline b^T_{3\times 1} & -R^T_{3\times 3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -a & -b_{1\times 3} \\ \hline C_{3\times 1} & R_{3\times 3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a = 0 \quad b = C^T \quad R^T = -R$$

Итак: $R^T = -R \Rightarrow R$ это кососимметрическая вещественная матрица размера 3×3, что дает 3 независимых вещественных параметра:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a^i M^i$$

При такой параметризации смысл генераторов M^i следующий: M^i – <u>генератор поворотов на угол a^i</u> вокруг оси Ox^i против часовой стрелки.

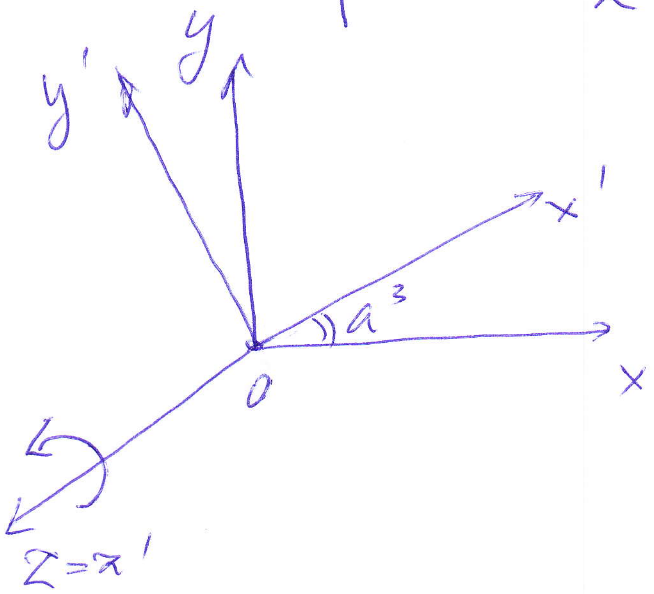
~~Например~~,

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Например: $$\exp(a^3 M^3) = \begin{pmatrix} \cos a^3 & \sin a^3 & 0 \\ -\sin a^3 & \cos a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \exp(a^3 M^3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} x\cos a^3 + y\sin a^3 \\ -x\sin a^3 + y\cos a^3 \\ z \end{pmatrix}$$



Ещё 3 вещественных параметра происходят от 1×3 строки $b=(b^1 b^2 b^3)$. Итак, группа Лоренца 6-мерное вещественное многообразие. Алгебра Ли группы Лоренца – 6-мерное вещественное подпространство в алгебре вещественных 4×4 матриц, которое мы будем задавать базисными элементами $(K^i)_{1\le i\le 3}$ – генераторы бустов, $(M^i)_{1\le i\le 3}$ – генераторы вращений. Их явный вид выберем так:

$$K^1=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad K^2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad K^3=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&+1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad M^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad M^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Множество матриц $\sum_{i=1}^{3}(b^iK^i+a^iM^i)$ (a^i и b^i – вещественные параметры) <u>замкнуто</u> относительно операции коммутирования $[X,Y]:=XY-YX$, так как имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}[K^i,K^j]&=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}M^k\\ [K^i,M^j]&=-\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}K^k\\ [M^i,M^j]&=-\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}M^k\end{aligned}\right\}\ \forall\ i,j\in\{1,2,3\}\quad (\bigstar)$$

Здесь $\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}0 & \text{если } i=j,\ i=k \text{ или } j=k\\ 1 & i=1\ j=2\ k=3\\ (-1)^{p(ijk)}\end{cases}$,

где $p(ijk)$ – чётность перестановки $\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix}$.

Набор коммутаторов (★) (или скобок Ли) базисных векторов K^i, M^i полностью определяет структуру и свойства алгебры Ли группы Лоренца. Произвольное преобразование $\Lambda \in \Lambda_+^\uparrow$ можно получить экспоненциальным отображением какого-либо элемента алгебры Ли:

$$\Lambda(\vec{a},\vec{b}) = \exp(b^i K^i + a^i M^i).$$

Придадим этому выражению более удобный (инвариантный) вид.

Введём новые генераторы:

$$\Omega^{0i} = K^i \quad 1 \le i \le j$$

$$\Omega^{ij}_{i<j}: \ \Omega^{12} = M^3 \quad \Omega^{13} = -M^2 \quad \Omega^{23} = M^1$$

Дополним эти 6 матриц $\Omega^{\alpha\beta}$ $\alpha<\beta$ до набора $\Omega^{\alpha\beta}$ с $\forall \alpha,\beta \in \{0,1,2,3\}$ правилом

$$\Omega^{\alpha\beta}_{\alpha>\beta} = -\Omega^{\beta\alpha}.$$

Тогда $\Omega^{ij} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} M^k$.

Введём также антисимметрическую матрицу параметров:

$$\omega = \|\omega_{\alpha\beta}\|_{0\le\alpha,\beta\le 4}\ ;\quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad \text{и}$$

$$\omega_{0i} = b^i\ ,\quad \omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a^k .$$

Тогда $\sum_{i=1}^{3}(b^i K^i + a^i M^i) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{4}\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$!

Матричные элементы генераторов $\Omega^{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$\boxed{(\Omega^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = -g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + g^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}}$$

Коммутационные соотношение (A) переписываются в виде:

$$\boxed{[\Omega^{\alpha\beta},\Omega^{\tau\sigma}] = g^{\alpha\tau}\Omega^{\beta\sigma} + g^{\beta\sigma}\Omega^{\alpha\tau} - g^{\alpha\sigma}\Omega^{\beta\tau} - g^{\beta\tau}\Omega^{\alpha\sigma}}$$

Преобразование Лоренца принимает вид: $\Lambda(\omega) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}\right)$.

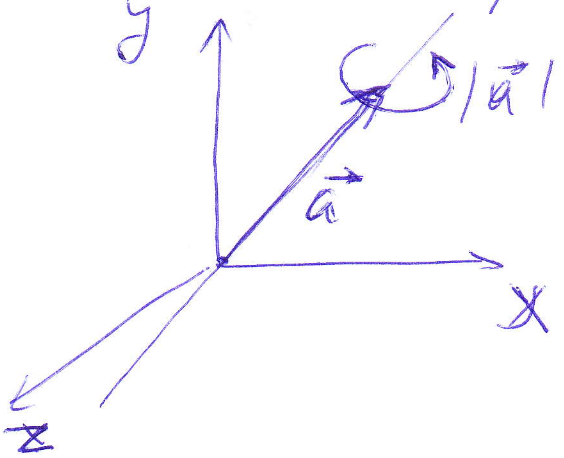
Упр* Убедитесь, что

а) $\Lambda(\vec{a}) = \exp(\vec{a}\cdot\vec{M}) \equiv \exp(\sum_{i=1}^{3} a^i M^i)$

есть поворот вокруг прямой в $\mathbb{R}^3$ с направляющим вектором

$$\vec{n}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

против часовой стрелки на угол $|a|$:



б) $\Lambda(\vec{b}) = \exp(\vec{b}\vec{K})$ есть буст в направлении прямой в $\mathbb{R}^3$ с направляющим вектором

$$\vec{n}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

со скоростью $\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\frac{|\vec{V}|}{c} = th|\vec{b}|$.

Это означает, что если разложить

трёхмерную часть $\vec{x}$ 4-вектора $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ на $\parallel$ и $\perp$ компоненты к вектору $\vec{n}_b$:

$$\vec{x} = \vec{x}_\perp + \vec{x}_\parallel, \quad \vec{x}_\parallel = \frac{(\vec{x}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = x_\parallel \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

то преобразование $\Lambda(\vec{b}) = \exp(\vec{b}\vec{K})$

будет иметь вид:

$$\begin{cases} x'^0 = \dfrac{x^0 - \frac{V}{c^2} x_\parallel}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \vec{V} = V\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \\ x'_\parallel = \dfrac{x_\parallel - \frac{V}{c}x^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp \end{cases}$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Если <u>оба</u> вектора параметров $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не нулевые, то

$\exp(\vec{a}\vec{M} + \vec{b}\vec{K})$ уже не имеет такой простой интерпретации, но можно показать, что всегда можно найти параметры $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (как функции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), что выполнено тождество:

$$\exp(\vec{a}\vec{M} + \vec{b}\vec{K}) = \exp(\vec{c}\vec{M}) \cdot \exp(\vec{d}\vec{K}),$$

то есть $\forall$ преобразование Лоренца из $\Lambda_+^\uparrow$ есть композиция бустa в некотором направлении и трёхмерного вращения пространства $\mathbb{R}^3$.

Чтобы учесть преобразование сдвигов (т.е. перейти к группе Пуанкаре):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

введём объекты $x^A = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$.

Тогда неоднородное преобразование из группы Пуанкаре можно записать в матричном виде:

$$x'^A = \Pi^A{}_B x^B :$$

$$\begin{pmatrix} x'^\mu \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda^\mu{}_\nu & a^\mu \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^\mu \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

Такой приём позволяет записать генераторы сдвигов P^μ в виде матриц 5×5:

$$P^0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{4\times 4} & \begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad P^1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{4\times 4} & \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{4\times 4} & \begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad P^3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{4\times 4} & \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрицы генераторов алгебры группы Лоренца переходят в $\left(\begin{array}{c|c} \Omega^{\alpha\beta}_{4\times 4} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\;0\;0\;0 & 0 \end{array}\right)$.

Пользуясь этим представлением, получим алгебру Ли группы Пуанкаре: 4 генератора трансляций P^μ и 6 лоренцевских генераторов $\Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{\beta\alpha}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &[\Omega^{\alpha\beta}, \Omega^{\tau\sigma}] = g^{\alpha\tau}\Omega^{\beta\sigma} + g^{\beta\sigma}\Omega^{\alpha\tau} - g^{\alpha\sigma}\Omega^{\beta\tau} - g^{\beta\tau}\Omega^{\alpha\sigma} \\ &[P^\mu, \Omega^{\alpha\beta}] = g^{\mu\alpha}P^\beta - g^{\mu\beta}P^\alpha \\ &[P^\mu, P^\nu] = 0 \end{aligned}}$$

Свободная релятивистская частица

Построим теперь релятивистское обобщение простейшей динамической модели: свободной массивной частицы классической механики.

Как известно, такая частица ~~...~~ задаётся 3 своими пространственными координатами и её Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right),$$

если для задания радиус-вектора $\vec{r}$ выбраны Декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Действие частицы — функционал от её траектории $\vec{r}(t)$:

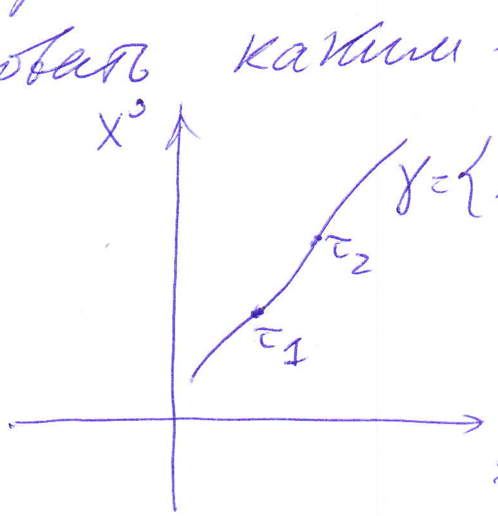
$$S[\vec{r}(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad \text{с}$$

заданными граничными условиями:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2.$$

Здесь, естественно, время t ~~=15г~~ является параметром траектории движения.

~~На~~ В релятивистском случае ~~полно~~ движение частицы происходит в пространстве Минковского, т.е. любой наблюдатель фиксирует положение частицы $\vec{x}$ и момент x^0 в своей системе отсчёта и время x^0 одного какого-то наблюдателя уже не является универсальным параметром, задающим траекторию частицы. С точки зрения любого фиксированного наблюдателя траектория частицы это линия в пространстве M_4, которую можно, в принципе, параметризовать каким-то параметром τ:



Значение τ_1 и τ_2 отвечают начальной и конечной точкам.

Функционал действия от $\gamma(\tau)$
должен быть

- Лоренц-инвариантным
- Зависеть от первых производных от τ
- Переходить в действие классической частицы в нерелятивистском пределе.

Простейший выбор: найти Лоренц-инвариантную один-форму и проинтегрировать её вдоль γ. Такая форма у нас есть: $(ds)^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$

Итак, будем искать действие релятивистской частицы в виде:

$$S[x^\mu(\tau)] = -\alpha\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu} =$$

$$= -\alpha\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}\,d\tau$$

Зам

Подчеркнём, что при преобразованиях Лоренца параметр τ, вообще говоря, не меняется: $x'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau)$.

Параметр α найдем из нерелятивистского предела.

Записанное выражение для $S[x^\mu(\tau)]$ обладает репараметризационной инвариантностью.

Пусть $\tau = f(\sigma)$ – строго монотонная функция нового параметра σ.

Тогда $x^\mu(\tau) = x^\mu(f(\sigma)) = \tilde{x}^\mu(\sigma)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \frac{d\sigma}{d\tau}\frac{d}{d\sigma} = \frac{1}{\frac{df}{d\sigma}}\frac{d}{d\sigma} \\ d\tau &= \frac{df}{d\sigma}d\sigma \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S[x^\mu] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}}\,d\tau =$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{df}{d\sigma}\right)^2}\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\sigma}\frac{d\tilde{x}_\mu}{d\sigma}}\left|\frac{df}{d\sigma}\right|d\sigma =$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\sigma}\frac{d\tilde{x}_\mu}{d\sigma}}\,d\sigma.$$

Выберем в данной системе отсчёта временную координату x^0 в качестве параметра τ. Этот выбор физически нагляден, но он приводит к тому, что $\tau = x^0$ — меняется при преобразованиях Лоренца и действие потеряет явную Лоренц-инвариантность:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}.$$

Здесь $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ — обычный вектор 3-х мерной скорости частицы.

Действие с такой параметризацией примет вид:

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\, dt \quad \left(\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}\right).$$

При $\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \ll 1$: $\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} + O\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right) \Rightarrow$

$$S[x^\mu] \simeq -\alpha c (t_2 - t_1) + \frac{\alpha c}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\, dt + \ldots$$

Первое слагаемое — несущественная

константа, а второе слага- =19=
емое должно дать классическое
действие $\int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} dt \Rightarrow \alpha = mc.$

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\, dt$$

Ещё раз отметим, что такой вид
действия не имеет явной Лоренц
инвариантности, но это следствие
параметризации. Корень $\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$ и
мера интегрирования dt преобра-
зуются под действием группы
Лоренца, но их произведение
$\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\, dt = \frac{ds}{c}$ – Лоренц-инвариант-
но.

Изучим теперь уравнение движения:
$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$ – не зависит
от $\vec{x}$ => общие уравнение Эйлера –
Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$

Сводится к

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}\right) = 0$$

Это, на первый взгляд сложное уравнение, имеет простое решение. Действительно, равенство нулю производной по времени означает, что

$$\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} = \vec{p} = Const$$

Умножим скалярно это векторное равенство само на себя:

$$\frac{m^2\dot{\vec{x}}^2}{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} = \vec{p}^2 = Const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = \frac{\vec{p}^2 c^2}{m^2c^2+\vec{p}^2} = Const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}} = Const$$

Таким образом, траектория свободной частицы — линейно зависит от времени:

$$\vec{x}(t) = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}}\,t + \vec{x}(0).$$

Таким образом, свободная релятивистская частица тоже движется по прямой, как и её классический нерелятивистский аналог.

Заметим теперь, что $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ весьма сложно и нелинейно преобразуется под действием группы Лоренца. Этот факт следствие того, что и $d\vec{x}$, и dt — меняются преобразованиями Лоренца.

Введём 4-х вектор скорости:

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}}$$

ds — интервал $\Rightarrow$ Лоренц-инвариантен $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{ds'} = \frac{dx'^\mu}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\right) =$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \text{ — действительно 4-вектор.}$$

Заметим, что для массивной частицы $ds^2 > 0$, так как всегда $\exists$ система покоя (связана с самой частицей) в которой $d\vec{x} = 0 \Rightarrow ds^2 = c^2 d\tau^2$, где τ означает собственное время частицы (не путайте с параметром траектории в действии!)

Поэтому $\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{c\,d\tau}$ – дифференцирование по собственному времени частицы.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Действие частицы

$$S = -mc\int_{s_1}^{s_2} ds = -mc^2\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau -$$

– пропорционально промежутку собственного времени частицы, прошедшему от начального ее положения до попадания в конечное положение.

Очевидное свойство 4-скорости u^μ:

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds\, ds} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1.$$

В лабораторной системе (где время – это компонента x^0) имеем такую структуру вектора u^μ: $\left(ds = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,d(ct)\right)$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

С другой стороны, из Лагранжиана свободной частицы мы получаем $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}$ – обобщённый импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc\vec{u}.$$

Введём 4-импульс p^μ:

$$p^\mu = mcu^\mu, \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2.$$

Согласно этому определению, $p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Это выражение пропорционально <u>энергии частицы</u>. Действительно:

$$E = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$(\vec{v} = \dot{\vec{x}})$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = c\,p^0.$$

В нерелятивистском пределе: $\left(\frac{v^2}{c^2} \ll 1\right)$

$$E \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2} + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Таким образом, даже <u>неподвижная</u> $(v=0)$ частица обладает запасом

Энергии: $E = mc^2$ (энергия покоя).

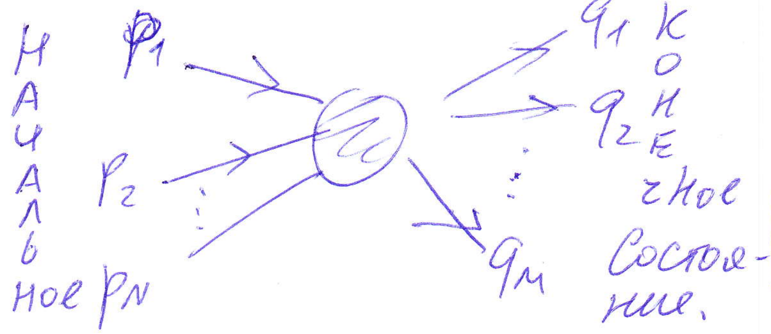
Итак: $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$; $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 \Rightarrow \boxed{\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

Это связь энергии частицы и её 3-импульса $\vec{p}$ (дисперсионное соотношение).

Зам Построить динамику в релятивистском случае удаётся только для частицы во внешнем поле (которое не ~~[illegible]~~ зависит от движения частицы). Ввести непротиворечивым образом взаимодействие 2х частиц <u>без</u> введения поля (переносчика взаимодействия) не получается, за исключением процессов <u>столкновения</u> где взаимодействие происходит в <u>одной точке</u> пространства-времени Минковского. Основной инструмент расчёта таких взаимодействий –

Закон сохранения полного 4-х импульса системы частиц:



$$\boxed{P^\mu = p_1^\mu + \dots + p_N^\mu = q_1^\mu + \dots + q_M^\mu = Q^\mu}$$

Равенство 4-векторов P^μ и Q^μ дает закон сохранения энергии $P^0 = Q^0$ и 3-х вектора полного импульса:

$$\vec{P} = \vec{Q}.$$

Заметим, что взаимодействие <u>не предполагается</u> упругим. Число частиц в начальном и конечном состояниях также может меняться (процессы распада и т.п.)