

Листок 1.3

Непрерывность. Дифференцируемость

срок сдачи 24 ноября

Задача 1. Докажите, что функция f на прямой непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества под действием этой функции открыт:

$$U \text{ открыто} \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ открыто.}$$

Задача 2. Остается ли это утверждение верным, если в нем «прообраз» заменить на «образ»?

Задача 3. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.

Задача 4. Функция Римана определена на $[0, 1]$, равна нулю в иррациональных точках, а для каждого рационального числа обратна знаменателю несократимой дроби, которая представляет это число. В каких точках функция Римана непрерывна?

Задача 5. Верно ли, что множество всех непрерывных функций на прямой континуально?

Задача 6* (каждый из пунктов считается отдельной задачей со звёздочкой)

Канторова лестница (функция Кантора) — это функция f , которая строится на отрезке $[0, 1]$ по индукции параллельно с построением множества Кантора.

База: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, на замкнутой средней трети отрезка $[0, 1]$ $f = \frac{1}{2}$.

Шаг. Пусть функция f задана на замыкании дополнения ко всем отрезкам ранга n . Тогда на замкнутой средней трети каждого отрезка ранга n она равна среднему арифметическому своих значений на концах этого отрезка. Докажите следующие свойства функции f .

- Эта функция может быть продолжена на канторово множество до непрерывной монотонной функции на отрезке.
- Канторова лестница отображает сюръективно канторово множество на отрезок $[0, 1]$.
- Канторова лестница удовлетворяет условию Гёльдера. Найдите наибольшее значение её показателя Гёльдера.
- Для любого $x \in [0, 1]$ найдите значение функции Кантора в точке x .

Задача 7* В каких точках дифференцируема функция Кантора?

Задача 8. Докажите, что дифференцируемая функция на прямой имеет не более, чем счетное множество простых нулей.

Задача 9. Приведите пример всюду дифференцируемой функции f на \mathbb{R} такой, что $f(x) = o(x^2)$, но $f'(x) \neq o(x)$ при $x \rightarrow 0$.