Логика и алгоритмы 2017. Листок 2.
`https://sites.google.com/site/logiccourse2017/`
Срок сдачи продлен до 8.11

Обязательные задачи

Множество всех функций из B в A мы будем обозначать A^B. Также мы будем писать $B \lesssim C$, если существует инъекция из B в C.

16. Докажите, что если $B \lesssim C$, то $B^A \lesssim C^A$. Кроме того, если $A \neq \emptyset$, то и $A^B \lesssim A^C$.

17. Докажите, что

    а) **(письменно)** множество всех конечных подмножеств данного счётного множества счётно.

    б) множество всех счётных подмножеств данного счётного множества имеет мощность континуума.

18. а) Докажите, что если $A \cap B = \emptyset$, то $\mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

    б) Выведите отсюда, что $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

19. а) **(письменно)** Докажите, что $\mathcal{P}(A)^B \sim \mathcal{P}(A \times B) \sim \mathcal{P}(B)^A$.

    б) Выведите отсюда, что $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Дополнительные задачи

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если оно является объединением некоторого семейства интервалов. Подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется *открытым*, если оно является объединением некоторого семейства открытых кругов.

20. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B \times C} \sim (A^C)^B$.

21. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$ есть объединение счётного множества открытых кругов.

22. Докажите, что множество всех счётных подмножеств множества $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

23. Докажите, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

24. Докажите, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

25. Существует ли множество $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ мощности континуума такое, что для всех $A, B \in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subset A$?

26. Докажите, что множество всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

27. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ есть объединение не более, чем счётного множества попарно непересекающихся открытых интервалов (возможно, имеющих концы на бесконечности).