

1 Введение: принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

Принцип наименьшего действия замечателен и тем, что помимо уравнений движения дает сразу дополнительную информацию о системе. В частности - главное, что бы обсудим на этой лекции - *симметрии* действия системы приводят к *законам сохранения*.

2.1 Энергия

Функция Лагранжа *замкнутой* (в более общем случае - *консервативной*) системы *явно* (требуется расшифровать!) не зависит от времени. Поэтому для нее в формуле

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1)$$

последнее слагаемое отсутствует. На уравнениях движения ЭЛ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2)$$

поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \stackrel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}{=} \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (3)$$

а стало быть

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 \quad (4)$$

и величина

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (5)$$

сохраняется (для явно не зависящей от времени функции Лагранжа консервативной системы) на уравнениях движения, или как говорят является *интегралом движения*.

- Эта величина называется энергией. Например для движения в потенциальном поле

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q)$$

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q) \quad (6)$$

полная энергия является суммой кинетической (зависящей от скоростей) и потенциальной (зависящей только от координат) энергий.

- Закон сохранения энергии является следствием инвариантности действия относительно сдвига времени.
- Энергия, выраженная не через координаты и скорости, а через координаты и импульсы $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (если эти уравнения можно разрешить относительно скоростей)

$$E = \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right)_{\dot{q}_i(q,p)} = (p_i \dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i(q,p)} = H(p, q) \quad (7)$$

называется функцией Гамильтона, а преобразование $L \rightarrow H$ преобразованием Лежандра.

- Самый важный интеграл движения: для большинства физических систем - единственный! Это определяет выделенную роль энергии в статистической физики. В квантовой механике гамильтониан - оператор эволюции, вернемся к этому при рассмотрении гамильтонова формализма.

2.2 Импульс

Пусть теперь функция Лагранжа не зависит от какой-либо из координат (называемой циклической) q_A (или - что то же самое - от сдвига координаты q_A : $L|_{q_A+\epsilon} = L$). Тогда из соответствующего уравнения ЭЛ следует, что

$$\frac{dp_A}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0 \quad (8)$$

т.е. соответствующая компонента импульса $p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}$ является интегралом движения.

Пример: для свободной частицы все компоненты импульса $\frac{dp_i}{dt}$, $i = 1, \dots, D$ являются интегралами движения, т.е. число независимых интегралов движения равно числу степеней свободы. Такие системы называются интегрируемыми, при этом любой другой интеграл движения (например энергия свободной частицы $E = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2$) выражается через эти независимые компоненты импульса.

Предположим теперь, что лагранжиан инвариантен лишь относительно *одновременного* сдвига всех координат

$$L(q, \dot{q}) = L(q_1 + \epsilon, \dots, q_D + \epsilon, \dot{q}), \quad \frac{dL}{d\epsilon} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (9)$$

Тогда в силу уравнений движения сохраняется лишь полный импульс $P = \sum_i p_i$, поскольку

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (10)$$

Пример: системы частиц: $q \rightarrow \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \in (\mathbb{R}^D)^{\times N}$

$$L(x, \dot{x}) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (11)$$

2-й закон Ньютона

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_a} \quad a = 1, \dots, N \quad (12)$$

где силы определяются потенциальной энергией, и зависят *только* от взаимного расположения тел, $U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{a < b} V(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$. Для такого потенциала $U(\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{r}) = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, а стало быть полный импульс $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_a} = \sum_a m_a \dot{\mathbf{x}}_a$ сохраняется.

2.3 Теорема Нетер

Идейно: *всякая непрерывная однопараметрическая симметрия задачи влечёт существование закона сохранения.*

Теорема 1 Если лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ сохраняется под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов $\delta q = s\chi(q)$ или

$$\begin{aligned} q^1 &\mapsto q^1(s) = q^1 + \chi^1(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \\ &\vdots \\ q^n &\mapsto q^n(s) = q^n + \chi^n(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \end{aligned} \tag{13}$$

То система имеет первый интеграл следующего вида

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \chi^i = \text{const}$$

В данном случае можно говорить о том, что на многообразии M обобщенных координат $\{q\}$ действует некоторая группа G симметрий (преобразований, оставляющих действие инвариантным), а $X = \chi^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ -векторное поле $X \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, отвечающее ее некоторой однопараметрической подгруппе.

Действие группы $G : M \mapsto M$ индуцирует действие на касательном расслоении TM , при котором вектора касательного пространства преобразуются как дифференциал отображения $M \mapsto M$

$$\begin{aligned} q^i &\mapsto \tilde{q}^i(q), \quad i = 1, \dots, \dim M \\ \chi^i &\mapsto \tilde{\chi}^i = \chi^j \frac{\partial \tilde{q}^i}{\partial q^j} \end{aligned} \tag{14}$$

Непрерывной симметрией будем называть однопараметрическую группу диффеоморфизмов M (гладких преобразований обобщенных координат, а вообще говоря - можно добавить и время), сохраняющих действие, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &\mapsto {}^s \mathbf{q} = \mathbf{q}(t; s) \\ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= L({}^s \mathbf{q}, {}^s \dot{\mathbf{q}}, t) \end{aligned} \tag{15}$$

Пример: Свободная частица в \mathbb{R}^2 , координаты декартовы, преобразование - поворот:

$$\begin{aligned} q_1 &\mapsto {}^s q_1 = \cos s \cdot q_1 + \sin s \cdot q_2 \\ q_2 &\mapsto {}^s q_2 = -\sin s \cdot q_1 + \cos s \cdot q_2 \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. При деформации получаем $L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}({}^s\dot{q}_1^2 + {}^s\dot{q}_2^2) = \frac{m}{2}(\cos^2 s + \sin^2 s)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ Лагранжиан вообще не изменился, значит и действие вообще не изменилось, данное преобразование действительно является симметрией.

Доказательство: упражнение на дифференцирование. Очевидно, что дифференцируя по параметру преобразования ($q' = \frac{dq}{ds}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}L(q(t, s), \dot{q}(t, s); t) = \frac{\partial L}{\partial q}q' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}' \stackrel{\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}{=} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}q' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}q' \right) \end{aligned} \quad (16)$$

откуда с очевидностью

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\chi \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}q' \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad (17)$$

- Закон сохранения импульса (полного импульса или его компонент) - очевидные частные случаи;
- Вращательная симметрия - задача на разбор

2.4 Одномерное движение

Зачем нужны интегралы движения? Рассмотрим самый простой пример.

Пусть у нас есть консервативная система с одной степенью свободы, т.е.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) \quad (18)$$

если ограничиться квадратичным по производной слагаемым. (Почему нет члена $A(q)\dot{q}$, коэффициент $g(q) = m$ можно считать константой или просто массой, а $q = x$ - декартовой координатой?)

Уравнения движения нам хорошо знакомы

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \quad (19)$$

и их решение всем хорошо известно (?) в линейном случае (гармонический осциллятор). Для решения задачи в произвольном потенциале достаточно ответить на два простых вопроса:

- Есть ли у данного дифференциального уравнения интегрирующий множитель?
- Может ли помочь найденный в начале лекции (и *всегда* существующий у такой системы) интеграл движения: энергия $\frac{dE}{dt} = 0$.

Ответы на два данных вопроса положительны и эквивалентны. Действительно, домножив обе части равенства (19) на \dot{x} , получим

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}\dot{x} &= -\frac{dU}{dx}\dot{x} \\
 \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} &= -\frac{d}{dt}U(x) \\
 \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) &= E, \quad \frac{dE}{dt} = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом вместо дифференциального уравнения 2-го порядка (19) мы получили дифференциальное уравнение первого порядка, которое интегрируется (при любом потенциале!) разделением переменных

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \\
 t = \int dt &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}
 \end{aligned} \tag{21}$$

где ответ (приведенный в виде неопределенного интеграла) пишется в виде неявной функции $t = t(x; E, C)$ с двумя константами интегрирования – энергией и, например, начального момента времени.

Одномерное движение консервативной системы (с интегралом движения – сохраняющейся энергией) представляет собой простейший пример *интегрируемой системы*. Ответ для этой задачи (с любым полиномиальным потенциалом $U(x)$ степени ≥ 3) выражается через абелев интеграл от голоморфного дифференциала $\frac{dx}{\sqrt{(E-U(x))}}$ на гиперэллиптической кривой $y^2 = E - U(x)$ вложенной в \mathbb{C}^2 .

2.5 Система двух тел

В качестве простейшего обобщения рассмотрим систему двух тел в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^D \ni \mathbf{x}$, т.е. систему с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1,2} \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a^2 - U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (22)$$

Как мы уже видели у этой системы есть D интегралов движения – полный импульс

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P} = 0 \quad (23)$$

что позволяет в два раза сократить число степеней свободы.

Перейдем в систему центра масс положив

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1,2} m_a \dot{\mathbf{x}}_a = 0 \quad (24)$$

и введем относительную координату $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Два последние равенства можно разрешить относительно

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{x} \quad (25)$$

поставляя которые в лагранжиан (22) получаем

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}) \quad (26)$$

т.е. систему из единственной частицы с приведенной массой

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (27)$$

- Физически это рассуждение легко проверить в пределе, скажем $m_1 \gg m_2$. Тогда движением тяжелого тела можно пренебречь и система (26) сводится к движению легкого тела с $m \rightarrow m_2$.
- Математически это рассуждение представляет собой простейший пример так называемой *гамильтоновой редукции*, когда мы садимся на поверхность уровней некоторых интегралов движения (в данном случае $\mathbf{P} = 0$) и факторизуем систему по действию соответствующей группы инвариантности (в данном случае по общему сдвигу всех координат). Об этом подробнее ниже.

- При $D = 1$ система интегрируема – возвращаемся к предыдущему примеру.