17.10.2017 Классическая теория поля =1=

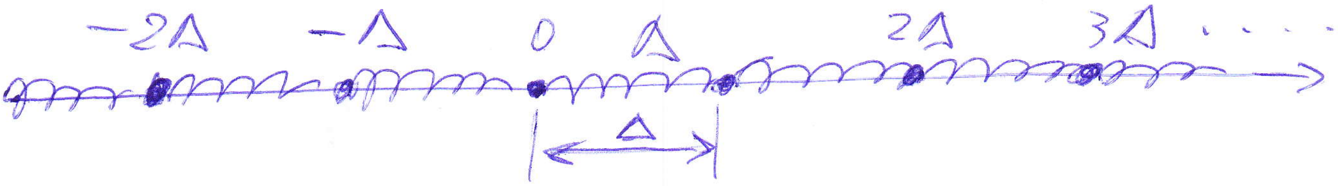
Лекция №6

Перейдём теперь к рассмотрению распределённых (полевых) систем, в которых динамическими переменными, меняющимися во времени, являются значения некоторой функции $\varphi(\vec{x}, t)$ в любой точке пространства $\mathbb{R}^3$. То есть значения $\vec{x}$ "нумеруют" координаты нашей системы.

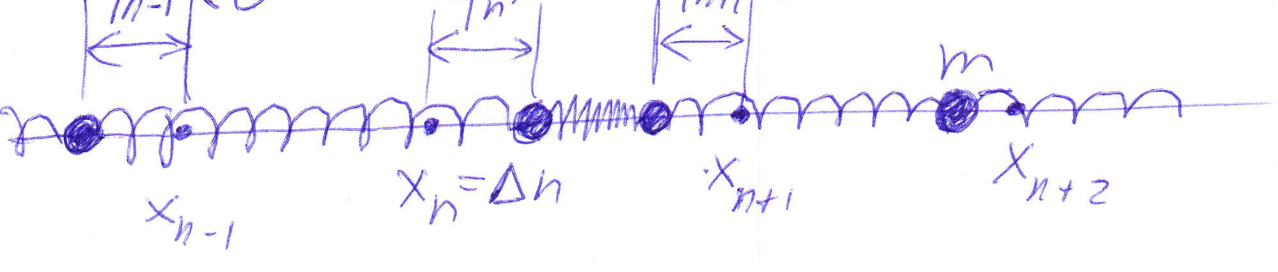
Чтобы лучше понять смысл этого утверждения и увидеть, какие уравнения можно писать на функции $\varphi(\vec{x}, t)$ рассмотрим (псевдо)непрерывный предел цепочки точечных масс с упругим взаимодействием.

Итак пусть одинаковые точечные частицы массы m могут двигаться по оси Ox, между частицами находятся одинаковые пружинки жёсткостью k, пренебрежимо малой массы и имеющие в свободном

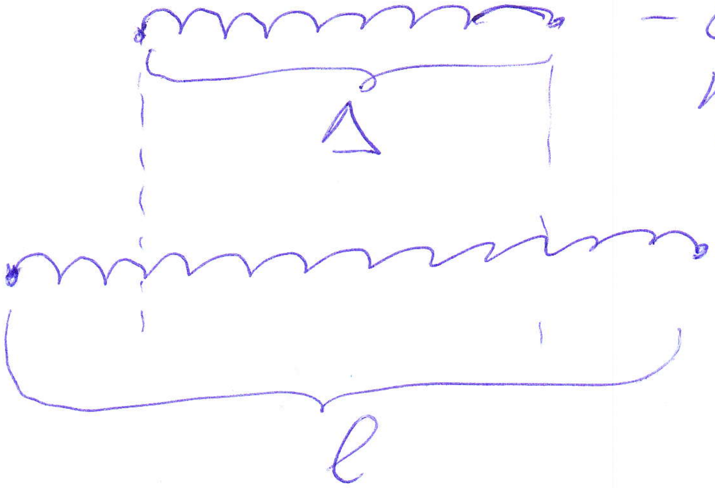
Состояний длину Δ. Поместим =2= начало отсчёта координат в точку равновесного положения одной из частиц, тогда координаты точек равновесия будут иметь значения $x_n = n\Delta$, где $n \in \mathbb{Z}$:



При движении системы частицы m будут отклоняться от положения равновесия, пружины будут деформироваться и действовать на частицы. В качестве динамических переменных удобно выбрать $q_n(t)$ – <u>отклонение</u> n-й частицы от положения равновесия. Величина $q_n(t) > 0$ если частица отклоняется вправо от x_n и $q_n < 0$ в противном случае:



Напомним, что деформированная пружина запасает потенциальную энергию, пропорциональную квадрату деформации:



– свободная пружина, $U = 0$

деформированная пружина,

$$U = \frac{k}{2}(l-\Delta)^2,$$

где k – жёсткость пружины.

В наших обозначениях и соглашениях о знаках энергия пружины между точками x_n и x_{n+1} даётся выражением $U = \frac{k}{2}(q_n - q_{n+1})^2$.

Теперь ~~нам~~ легко написать Лагранжиан нашей цепочки:

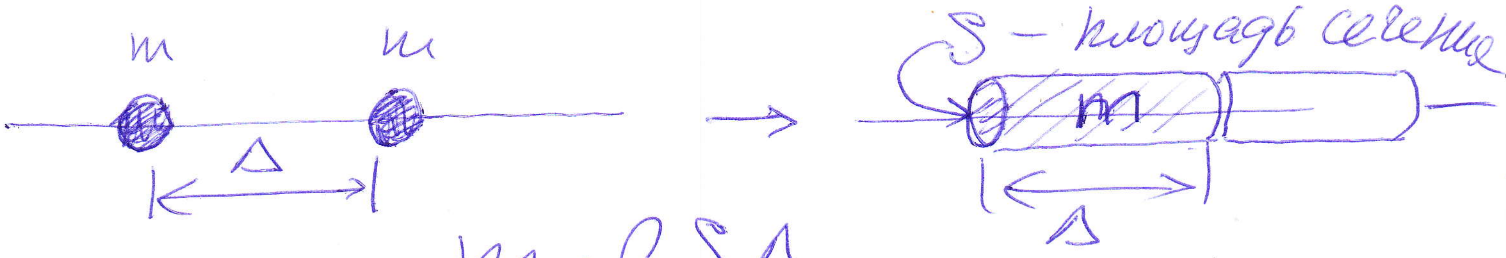
$$L = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{m\dot{q}_n^2}{2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{k(q_n - q_{n+1})^2}{2}$$

Динамические уравнения на координаты $q_n(t)$ — уравнение Эйлера-Лагранжа — имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{q}_n = k\left(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n\right)}, \quad (\star)$$

Устремим теперь $\Delta \to 0$. Чтобы масса конечных участков оси Ox оставалась <u>конечной</u>, надо предположить, что m "размазана" по отрезку Δ с конечной плотностью ρ:



$$m = \rho S \Delta.$$

Кроме того, учтем, что согласно механике, жесткость k тоже зависит от Δ:

$$k = E\frac{S}{\Delta},$$

где E — так называемый модуль Юнга —

характеризует упругие свойства материала пружинок.

Далее, $q_n(t)$ зависит от $n \Leftrightarrow$ зависит от координаты $x_n = \Delta \cdot n$ точки равновесия n-й частицы.

$$q_n(t) = q(x_n, t)$$

При $\Delta \to 0$ координаты x_n плотно заполняют ось Ox, и $q(x_n, t)$ превращается, фактически, в функцию непрерывной переменной x и времени t: $q(x_n, t) \longrightarrow q(x, t)$.

Найдём предел системы динамических уравнений ($\star$) при $\Delta \to 0$:

$$q_{n+1}(t) + q_{n-1}(t) - 2q_n(t) =$$

$$= q(\Delta(n+1), t) + q(\Delta(n-1), t) - 2q(\Delta n, t)$$

$$= q(x_n+\Delta, t) + q(x_n-\Delta, t) - 2q(x_n, t) =$$

в ряд Тейлора по Δ

$$= \left(q(x_n,t) + \Delta q'(x_n,t) + \frac{\Delta^2}{2} q''(x_n,t) + o(\Delta^2)\right)$$

$$+ \left(q(x_n,t) - \Delta q'(x_n,t) + \frac{\Delta^2}{2} q''(x_n,t) + o(\Delta^2)\right) -$$

$$-2q(x_n,t) = \Delta^2 q''(x_n,t) + o(\Delta^2).$$

Учитывая это получаем:

$$\ddot{q}(x_n,t) = \frac{k}{m}\left(\Delta^2 q''(x_n,t) + o(\Delta^2)\right) =$$

$$= E\,\frac{S}{\Delta}\,\frac{1}{\rho S \Delta}\left(\Delta^2 q''(x_n,t) + o(\Delta^2)\right) =$$

$$= \frac{E}{\rho}\left(q''(x_n,t) + \frac{o(\Delta^2)}{\Delta^2}\right)$$

В пределе $\Delta \to 0$ получаем уравнение второго порядка в частных производных:

$$\ddot{q}(x,t) \equiv \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\,\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}.$$

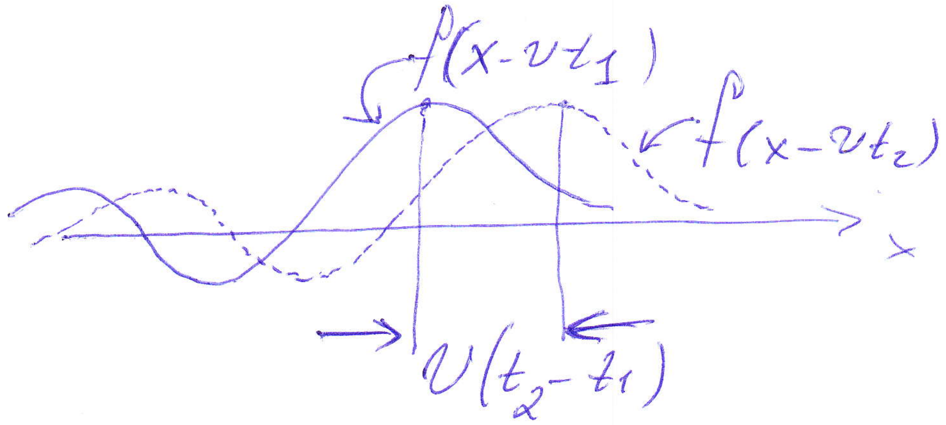
Величина $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ имеет размерность скорости и представляет собой скорость распространения продольных волн упругих деформаций в жёстком стержне. Если учесть ещё 2 пространственные компоненты, то получим естественное обобщение уравнения:

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 q(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0.$$

Это так называемое волновое уравнение. Среди его решений есть, например волны, распространяющиеся со скоростью v в положительном и отрицательном направлении координатных осей:

$$\varphi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt),$$

где g и f − 2 дважды дифференцируемые функции − задают движение вдоль оси Ox:



Положим $v = c$ − скорость света. Тогда $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2}$ и

дифференциальный оператор второго порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \equiv g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} -$$

инвариантен относительно преобразований из группы Пуанкаре: если $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$, то

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Для этого оператора введём специальный символ:

$$\Box = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = \partial_{\mu} \partial^{\mu},$$

где $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ – ещё одно удобное сокращение.

Оператор $\Box$ называется оператором Даламбера (d'Alambert)

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \Delta,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Ещё одно удобное обозначение примем для трёхмерного градиента:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix} \text{ – векторный оператор}$$

"Скалярное произведение" $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \quad = 9 =$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} = \Delta .$$

Переобозначив в согласии с традицией $q(\vec{x}, t) \to \varphi(x^0, \vec{x}) = \varphi(x)$, получим волновое уравнение вида:

$$\Box \varphi(x) = 0.$$

Если потребовать, чтобы это уравнение было инвариантным относительно преобразований группы Пуанкаре, то, учитывая инвариантность $\Box$, приходим к требованию: если $x \to x' = \Lambda x + a$, то φ должна меняться $\varphi \to \varphi'$ таким образом, чтобы $\varphi'(x') = \varphi(x)$ или

$$\varphi'(\Lambda x + a) = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \varphi\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right).$$

Это хорошо известное правило распространения действия группы на функции на многообразии, если дано действие группы на самом многообразии.

По определению, действие группы G на многообразии M это отображение

$$G \times M \to M: \quad g \triangleright x = x', \quad g \in G, \ x, x' \in M$$

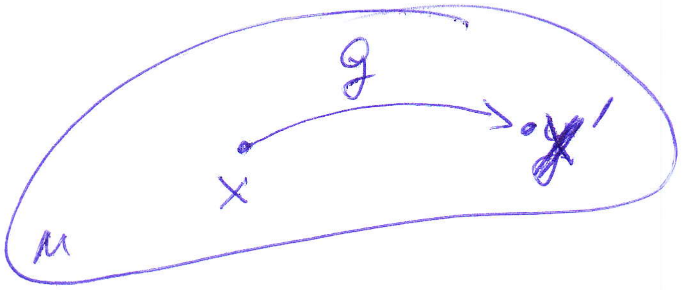
такое, что $g_2 \triangleright (g_1 \triangleright x) = (g_2 * g_1) \triangleright x$, где $g_2 * g_1$ — групповое произведение.

Тогда можно определить действие G на функциях на M: $f: M \to K$, где K — числовое поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, напр.).

Это действие задаётся так:

$$g \triangleright f = f', \quad f'(x) := f(g^{-1} \triangleright x)$$

То есть, чтобы найти значение новой функции f' в точке $x \in M$, Надо вычислить значение функции f в точке-прообразе x относительно действия элемента g:



, то $f \xrightarrow{g} f'$: $f'(x') = f(x)$

Проверим выполнение требования

$$g_2 \triangleright (g_1 \triangleright f) = (g_2 * g_1) \triangleright f.$$

Обозначим $g_2 \triangleright (g_1 \triangleright f) = f''$ (это <u>не</u> производные!)

$$g_1 \triangleright f = f'$$

Найдём значение $f''(x)$ в $\forall x \in M$:

$$\underline{f''(x)} = (g_2 \triangleright f')(x) = f'(\underbrace{g_2^{-1} \triangleright x}_{y}) =$$

$$= f'(y) = (g_1 \triangleright f)(y) =$$

$$= f(g_1^{-1} \triangleright y) = f(g_1^{-1} \triangleright (g_2^{-1} \triangleright x)) =$$

$$= f((g_1^{-1} * g_2^{-1}) \triangleright x) = f((g_2 * g_1)^{-1} \triangleright x) =$$

$$= \underline{((g_2 * g_1) \triangleright f)(x)}.$$

<u>Определение:</u> Функция $\varphi(x)$: $M_4 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ называется вещественным <u>скалярным</u> полем в пространстве Минковского M_4, если при преобразованиях из ограниченной группы Пуанкаре $\mathcal{A} = (\Lambda, a)$, $\Lambda \in \Lambda_+^\uparrow$:

$$\mathcal{A} \triangleright x = x' = \Lambda x + a$$

функция φ преобразуется в φ' со свойством: $\mathcal{A} \triangleright \varphi = \varphi'$ и $\boxed{\varphi'(x') = \varphi(x)}$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ В электродинамике мы познакомимся с другими полями в M_4 — <u>векторными</u>. Но главным в отнесении функции на M_4 к тому или иному типу полей является поведение этой функции ~~[illegible]~~ при действии группы Пуанкаре.

В заключение рассмотрим вопрос о генераторах действия группы Пуанкаре на функциях $\varphi(x)$ (скалярных).

(а) <u>Трансляции:</u> $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

Соотв. оператор на скалярных функциях $\pi(a) \triangleright \varphi = \varphi'$

Поскольку при $a^\mu = 0$ $\pi(a) = id$, то при малых a^μ: $\pi(a) = id + a^\mu P_\mu + o(a)$,

или $P_\mu = \left.\frac{\partial \pi(a)}{\partial a^\mu}\right|_{a=0}$ — это некоторый оператор на ф-циях.

Его явный вид найдём из разложения по a^μ равенства:

$$(\pi(a) \triangleright \varphi)(x) = \varphi'(x) = \varphi(x-a)$$

обратное к $x' = x + a$

$$\Downarrow$$

$$\left(id + a_\mu P^\mu + o(a)\right) \triangleright \varphi(x) = \varphi(x) - a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi(x) + o(a)$$

И, поскольку $(id \triangleright \varphi)(x) = \varphi(x)$, получаем:

$$(a_\mu P^\mu \triangleright \varphi)(x) = -a^\mu \partial_\mu \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad P_\mu = -\partial_\mu = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Это оператор, представляющий генераторы трансляций на ф-циях.

$\Pi(a) = \exp(a_\mu P^\mu) = \exp(-a^\mu \partial_\mu)$ и по формуле Тейлора:

$$(e^{-a^\mu \partial_\mu} \varphi)(x) = \varphi(x-a)$$

(б) Лоренцевские преобразования:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}\right)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta} + o(\omega)\right)^\mu{}_\nu x^\nu =$$

$$= x^\mu + \underbrace{\frac{1}{2}(\omega\cdot\Omega)^\mu{}_\nu x^\nu}_{\equiv \delta x^\mu} + o(\omega)$$

$$(\Pi(\omega) \triangleright \varphi)(x) = \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\Pi(\omega) = id + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta} + o(\omega)$$

$$\varphi(\Lambda^{-1}x) \simeq \varphi(x - \delta x) = \varphi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi(x) + o(\delta x)$$

Теперь получаем:

$$(\pi(\omega)\triangleright\varphi)(x)\simeq\left(id+\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}+o(\omega)\right)\triangleright\varphi(x)=$$

$$=\varphi(x)+\underline{\frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta})\triangleright\varphi(x)}+o(\omega)=$$

$$=\varphi(x)-\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\varphi+o(\delta x)=$$

$$=\varphi(x)\underline{-\frac{1}{2}(\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\varphi(x)}+o(\omega)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Sigma^{\alpha\beta}=-(\Omega^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Вспоминая, что $(\Omega^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}=-g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu}+g^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}$,

получаем: $\Sigma^{\alpha\beta}=x^{\beta}\partial^{\alpha}-x^{\alpha}\partial^{\beta}\equiv$

$$\equiv x^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}-x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}.$$

Мы получили <u>представление</u> алгебры Пуанкаре на пространстве скалярных функций в пространстве Минковского. Отметим, что генераторы $\Sigma^{\alpha\beta}$ и P^{μ} – <u>дифференциальные</u> операторы, а не конечные матрицы.

Упр проверьте, что $P^\mu = -\partial^\mu$ и

$$\Sigma^{\alpha\beta} = x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta$$

образуют алгебру группы Пуанкаре, то есть

$$[\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\sigma\rho}] = g^{\alpha\sigma}\Sigma^{\beta\rho} + g^{\beta\rho}\Sigma^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\rho}\Sigma^{\beta\sigma} - g^{\beta\sigma}\Sigma^{\alpha\rho}$$

$$[P^\mu, \Sigma^{\alpha\beta}] = g^{\mu\alpha}P^\beta - g^{\mu\beta}P^\alpha$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

Зам. $[\partial^\alpha, x^\beta] = \underline{\partial^\alpha x^\beta} - x^\beta\partial^\alpha =$
$= g^{\alpha\beta} + x^\beta\partial^\alpha - x^\beta\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}$ – удобное правило.
