Листок 3.

Задача 1. Имеется 10 коробок, в каждой из которых лежит a белых и b черных шаров. Из первой коробки выбирается случайным образом шар и перекладывается во вторую коробку, затем из второй коробки извлекается один шар и перекладывается в третью и т. д. Наконец из последней коробки извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Задача 2. Агент Д. следит за передвижениями президента некоторой компании. Известно, что президент бывает в офисе с вероятностью 60%, а на даче с вероятностью 40%. У агента Д. есть два осведомителя, причем первый ошибается с вероятностью 20%, а второй – с вероятностью 10%. Первый осведомитель утверждает, что президент компании в офисе, а второй осведомитель утверждает, что он на даче. Где президент?

*Задача 3.** Принцесса выбирает жениха. Свататься приехали N женихов. Про любых двух принцесса может сказать кто лучше, а кто хуже. Все женихи образуют упорядоченное множество, т. е. если A лучше B и B лучше C, то A лучше C. Женихи заходят к принцессе по очереди в случайном порядке. Если невеста отказывает жениху, то он сразу уезжает. Если принцесса выбирает жениха, то на этом просмотр женихов заканчивается. Как действовать принцессе, чтобы с наибольшей вероятностью выбрать лучшего жениха?

Задача 4. N раз бросается монета с вероятностью выпадения орла p. Найдите вероятность того, что (a) выпал хотя бы один орел, (b) выпало ровно три орла, (c) число выпавших орлов четно, (d) выпало орлов меньше половины.

Задача 5. Проводятся N испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха 1/2. Какова вероятность, что успех имел место ровно 2 раза при условии, что за все N испытаний было четное число успехов?

Задача 6. Для последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p найдите вероятность того, что m успехов произойдут прежде, чем n неудач.

Задача 7. Игрок выбирает «герб» или «решетку», после чего бросается монета. Если выпадает та сторона монеты, которая была названа игроком, то он выигрывает, получая, скажем 1 рубль; в противном случае он столько же проигрывает. Начальный капитал составляет x рублей и игрок ставит себе целью довести его до некоторой суммы a. Игра продолжается до тех пор, пока либо игрок наберет заранее определенную сумму a, либо разорится. Какова вероятность того, что в конце концов игрок разорится, так и не набрав желаемую сумму a рублей?

*Задача 8.** Алиса и Боб играют в следующую игру. Бросается правильная монета до тех пор пока не встретится комбинация 110 или 100. Алиса выигрывает, если первой появилась комбинация 110, а Боб в случае, когда первой появилась комбинация 100. Кто будет выигрывать чаще?

Задача 9. По числовой прямой двигается частица, которая каждую секунду перемещается на единицу вправо или на единицу влево, причем выбор обоих направлений равновозможен и не зависит от соответствующего выбора на других шагах. Траектории частицы изображаем на координатной плоскости переменных (t, x) в виде ломаных, соединяющих точки с целочисленными координатами t и x. Здесь x – положение частицы, а t – время. Пусть $x_0 > 0$, $x_1 > 0$ и $t_0 < t_1$. Докажите, что число путей из (t_0, x_0) в (t_1, x_1), которые касаются или пересекают ось времени, равно числу путей из $(t_0, -x_0)$ в (t_1, x_1). Какова вероятность того, что частица, которая вышла из нуля и пришла в точку $k > 0$ за N шагов, все время пути находилась в точках с положительными координатами?

Задача 10. Пусть частица вышла из начала координат. Обозначим через u_{2n} вероятность того, что в момент времени $t = 2n$ частица вернулась в точку $x = 0$, а через f_{2n} вероятность того, что это произошло первый раз. Найдите u_{2n} и f_{2n}. Докажите, что частица с вероятностью единица возвращается в начало координат.

Задача 11. Оцените среднее число изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы не более одной булочки из ста было без изюма.

Задача 12. Робот «сапер» обследует местность на предмет неразорвавшихся снарядов. Среднее число снарядов на единицу площади равно λ. Радиус обзора сканирующего устройства равен R. Робот двигается прямолинейно и равномерно со скоростью v. Вероятность обнаружения снаряда равна $p(v)$. Найдите вероятность обнаружения k снарядов за время t.

Remarks on the problem set 3

Ex 1. Let's calculate the probability of the event W_2 :=*sampling a white ball from the the second box* (here B_1 and W_1 stand for sampling a black/white at the first extraction)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_2) &= \mathbb{P}(W_2|W_1)\mathbb{P}(W_1) + \mathbb{P}(W_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{a+1}{a+b+1}\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1}\frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} = \mathbb{P}(W_1)\end{aligned}$$

Thus the same holds for the next boxes.

Ex 2. The key point in this exercise is not mathematical, but how we interpret the failure rate of the informant. We should understand that when the president is in the office (outside), the informants will report that he is outside (in the office) *indipendently* with probability 0.2 and 0.1. Formally, if we denote by A the event "*the president is in the office*", and with A_1 (A_2) the event "*the first (second) informant reported that the president is in the office*", we are assuming that $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|A) = \mathbb{P}(A_1|A)\mathbb{P}(A_2|A) = 0.8 * 0.9$ etc. Then

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|A_1 \cap \bar{A}_2) &= \tfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A_1 \cap \bar{A}_2|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}\\ &= \tfrac{\mathbb{P}(A_1|A)\mathbb{P}(\bar{A}_2|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A_1|A)\mathbb{P}(\bar{A}_2|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A_1|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}_2|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} = \tfrac{0.8*0.1*0.6}{0.8*0.1*0.6+0.2*0.9*0.4}\end{aligned}$$

Ex 3. Recall that the princess is only interested to choose to best candidate, namely she wants to maximize the probability to select the candidate ranked 1. The only thing she can choose is when to stop. It is clear that there is no point in choosing someone who is not the best ranked up to his arrival (as otherwise he is ranked 1 with probability 0). Due to permutation invariance, it is also clear that the optimal stopping strategy cannot depend on the (chronological) order of the ranks. Thus the optimal stopping strategy should be of the following type: *do not choose any of the first $M-1$ candidates; starting from the M-th candidate, take the first one who betters all of those who came ahead of him. If none satisfies this constraint, take the last one.*

Then one just needs to optimize over M. Call p_M the probability to select the best using the aforementioned stopping policy depending on the parameter M. Denote B_i the event "*the i-th candidate is ranked* 1", and S_i the event "*the i-th candidate is selected*". Then

$$\begin{aligned}p_M &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(S_i|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=M}^{N-1} \mathbb{P}(\text{the best of the first } i-1 \text{ is in the first } M-1)\tfrac{1}{N}\\ &= \tfrac{1}{N}\sum_{i=M}^{N} \tfrac{M-1}{i-1}\end{aligned}$$

(notice that the calculation is correct also for $i = N$). Thus the optimal M is the maximizer of $\frac{M-1}{N}\sum_{i=M-1}^{N-1}\frac{1}{i-1}$. For N large, it is easily seen that the optimal M satifies $\bar{M} = \frac{N}{e}(1 + o(1))$.

Ex 4. Let's discuss the point (c). Let's call E_n the event "*after tossing a coin n times, we had Tail (Eagle in Russian) an even number of times*", and let

$r_n = \mathbb{P}(E_n)$. Then

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_{n+1} &= \mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}|\bar{E}_n)\mathbb{P}(\bar{E}_n) \\ &= (1-p)r_n + p(1-r_n) \end{aligned}$$

which implies $r_n = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$.

Ex 6. The probability to have exactly m successes *before* n failures equals the probability to have m successes in the first $m+n-1$ trials, and next a failure. Thus it is $\binom{m+n-1}{m} p^m (1-p)^n$.

Ex 8. Once the first 1 in the coin flip sequence appears, there are two possibilities for the next flip. If another 1 appears, then Bob wins for sure; if a 0 appears, then Bob still has some chances to win (if yet another 0 appears, Alice wins, but if 1 follows then the probability that Bob wins is the same as it was at the beginning). Thus Bob has the highest chance to win. More precisely, if p is the probability that Bob wins

$$p = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{11 appears}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{10 appears}} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} * 0}_{\text{100 appears}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}p}_{\text{101 appears}} \Big)$$

Thus $p = 2/3$.

Ex 11. The average number of mines potentially detectable by the robot up to time t is $\mu := \lambda\pi R^2 vt$. If E_n is the event *the robot encounters exactly n potentially detectable mines* and F_n is *the robot detects n mines*, then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_m) &= \frac{e^{-\mu}\mu^m}{m!} \\ \mathbb{P}(F_n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(F_n|E_m)\mathbb{P}(E_m) = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \frac{e^{-\mu}\mu^m}{m!} = \frac{e^{-p\mu}(p\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$