Листок 4.

Задача 1. Некто приходит на станцию метро в случайный момент времени и садится в первый пришедший поезд. Оказывается, что в одну сторону он едет гораздо чаще, чем в другую. Как такое может быть?

Задача 2. X и Y договорились встретиться в промежуток времени с 12.00 до 13.00, причем каждый из них готов ждать ровно 30 минут. Какова вероятность встречи? Какова вероятность того, что они встретились и X не ждал Y? Какова вероятность, что они пришли одновременно?

Задача 3. Трое загадывают по числу из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность того, что существует треугольник с такими сторонами?

Задача 4. (Игла Бюффона) Пусть на полосу бесконечной длины и единичной ширины на плоскости случайным образом бросается игла единичной длины. Какова вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну из линий, образующих полосу?

Задача 5. Точка (x,y) выбирается из квадрата $[0,1]\times[0,1]$ согласно равномерному распределению. Найдите распределения случайных величин: (a) $|x-y|$ (b) $\max\{x,y\}$, (c) $\min\{x,y\}$, (d) xy, (e) x/y.

Задача 6. Точка (x,y) выбирается из квадрата $[0,1]\times[0,1]$ согласно равномерному распределению. Найдите распределения случайной величины $\frac{x}{x+y}$.

Задача 7. На плоскости нарисован единичный квадрат. Случайным образом проводится прямая и вычисляется длина ξ проекции квадрата на прямую. Найдите функцию распределения случайной величины ξ и нарисуйте ее график.

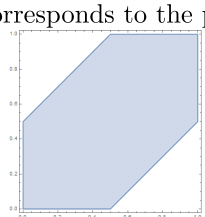
Задача 8. M. выбирает точку (x,y) из единичного круга $B=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2\le 1\}$ согласно равномерному распределению на B. N. выбирает точку (x,y) следующим образом: он выбирает (φ,r) из прямоугольника $\Pi=[0,2\pi)\times[0,1]$ согласно равномерному распределению на Π, а затем полагает $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$. Отличаются ли распепределения выбранных точек у M. и N.? Как следует M. изменить правила выбора (φ,r), чтобы распределения совпали?

*Задача 9.** Пусть вектор (ξ,η) равномерно распределен на $K=[0,1]\times[0,1]$. Докажите, что вектор (X,Y), где
$$X=\sqrt{-2\ln\xi}\cos(2\pi\eta),\quad Y=\sqrt{-2\ln\xi}\sin(2\pi\eta),$$
имеет нормальное стандартное распределение.

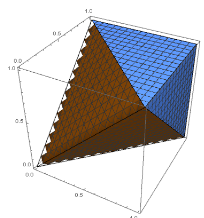
Задача 10. Точка (x,y,z) выбирается согласно равномерному распределению на единичной сфере $x^2+y^2+z^2=1$. Найдите распределение проекции этой точки на плоскость x, y.

Remarks on the problem set 4

Ex 2. It is easily seen that the area of the shaded area in the picture is $3/4$: it corresponds to the probability that X and Y meet.



Ex 3. Three numbers are the side lengths of a triangle iff the largest one does not exceed the sum of the other two. In other words, we have to calculate the volume of the region $\{\max\{x, y, z\} \leq (x + y + z)/2\}$ within $[0, 1]^3$. Since we are removing three tetahedrons, each of volume $1/6$, from such a cube, the answer is $1/2$.



Ex 4. This is a classical problem, as it has been used to provide the first Monte Carlo simulation in history. Here we discuss a slight variation of this problem: suppose that the '*needle*" is replaced by any Lipschitz curve of length ℓ. What is the expected number of intersections with a grid of horizontal lines, spaced at distance 1 from each other?

The answer is surprisingly simple. First, if the needle is just a segment of length ℓ, the expected value must be proportional to ℓ, $\mathbb{E}[N] = c\ell$ for some $c \geq 0$ (it is an increasing function of ℓ and satsfies $f(\ell_1 + \ell_2) = f(\ell_1) + f(\ell_2)$). Next if the needle is a polygonal curve of total length ℓ, then again by linearity of the expected value $\mathbb{E}[N] = c\ell$ since the total number of intersections is the sum of the intersections of each segment in the needle. Finally, by monotone approximation this holds for any sufficiently regular curve. Thus the whole problem is reduced to calculate the constant c. However, if the needle is a circle of radius $1/2$, then $N = 2$ a.s., and therefore in this case $2 = \mathbb{E}[N] = c\,(2\pi)$. So that $c = 1/(2\pi)$, and the expected value of the number of intersections for any Lipschitz curve is $\mathbb{E}[N] = \frac{\ell}{2\pi}$. Notice that if the needle is a segment of length $\ell < 1$, then this also coincides with the probability of having at least one intersections (since two or more intersections cannot occur in this case).

Ex 9. The exercises **6–10** share the following point. Let X be a random variable with values in a measurable space E, and let $\mathbb{P}$ be the law of X (thus $\mathbb{P}$ is a probability measure on E). If a map $f\colon E \to F$ is measurable, then the law of the random variable $f(X)$ is $\mathbb{P} \circ f^{-1}$. In particular, let's consider the case $E = \mathbb{R}^n$ and $F = \mathbb{R}^m$ (the same statements hold on manifolds), let's assume that $\mathbb{P}$ admits a density φ w.r.t. the Lebesgue measure, that the map f is smooth a.e. and (locally) injective. Then also the law of the random variable $Y = f(X)$ admits a density ψ

on $\mathbb{R}^m$, and the usual change of variables formula holds

$$\psi(y) = \frac{\varphi \circ f^{-1}(y)}{|f'| \circ f^{-1}(y)}, \tag{1}$$

where $|f'|$ stands for the absolute value of the Jacobian determinant of f.

Back to Ex. 9, we may apply directly the computation (1). To avoid cumbersome computations, let's split the work in two parts. First, define the random variable $A = \sqrt{-2\log\xi}$. Notice that for $a \geq 0$

$$\mathbb{P}(A \leq a) = \mathbb{P}(\xi \geq e^{-a^2/1}) = 1 - e^{-a^2/2}.$$

In particular the law of A admits a density $\chi(a) = a\, e^{-a^2/2}\mathbf{1}_{a\geq 0}$. Since ξ and η are independent, also A and η are. Therefore (A, η) admits the density

$$\varphi(a, s) = a\, e^{-a^2/2}\mathbf{1}_{a\geq 0}\mathbf{1}_{0\leq s\leq 1}.$$

Now let's apply (1) to the transformation

$$f(a, s) = (a\, \cos(2\pi s), a\, \sin(2\pi s))$$

which is just the usual polar coordinates transformation. An immediate application of (1) then gives for (X, Y) the density

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\tfrac{x^2+y^2}{2}).$$