Листок 1.

Задача 1. Два человека играют в некоторую игру, причем у обоих шансы победить одинаковые. Они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Однако игра остановилась раньше, когда первый выиграл пять партий, а второй выиграл три партии. Как справедливо разделить приз?

Задача 2. Из колоды (52 карты) вынимают 4 карты. Какова вероятность, что все четыре карты черные?

Задача 3. В некоторых ресторанах Москвы, если клиент заказывает кувшин вина, то ему предлагают разыграть на костях еще один. Правила розыгрыша следующие: пара игральных костей бросается три раза, клиент выигрывает, если в результате хотя бы одного бросания выпадает комбинация $(5, 6)$ или $(6, 5)$. Какова вероятность выиграть кувшин вина?

Задача 4. Колоду из 52 карт раздают на четверых игроков. Один из игроков объявляет, что у него есть туз. Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз? Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

Задача 5. При игре в преферанс 32 карты раздали на троих человек по 10 карт каждому и две карты снесли в прикуп. Какова вероятность того, что в прикупе оказались король и дама? А если вы один из игроков и у вас среди карт нет королей и дам?

Задача 6. N человек принесли подарки друг для друга. Затем эти подарки сложили в мешок и наугад каждый вынул из мешка себе подарок. Какова вероятность того, что конкретный человек вынул подарок, который он принес? Какова вероятность того, что никто не вытащил подарок, который сам принес?

Задача 7. Электричка состоит из n вагонов. Каждый из k пассажиров выбирает вагон наудачу. Какова вероятность, что в каждом вагоне будет хотя бы один пассажир? Какова вероятность, что будут заняты ровно r вагонов?

Задача 8. На плоскости отметили точки с координатами (x, y), где $x, y \in \{1, 2, \dots, N\}$. Наугад выбирают точку (x, y) из отмеченных. Пусть P_N – вероятность того, что она лежит в круге радиуса N? Вычислите $\lim_{N\to\infty} P_N$.

*Задача 9.** (Банах) Некий человек одновременно купил две коробки спичек и положил их в карман. После этого каждый раз, когда ему нужно было зажечь спичку, он доставал наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время, вытащив одну из коробок, человек обнаружил, что она пуста. Какова вероятность, что в другой коробке в этот момент находилось k спичек, если число спичек в новой коробке равно n?

*Задача 10.** Сто мудрецов по одному заводят в комнату, в которой стоят сто закрытых коробок. В каждой коробке лежит табличка с именем одного из мудрецов. Все имена различны. Мудрец открывает 50 короб одну за другой в произвольном порядке. Если в одной из открытых им коробок есть его имя, то он выживает, а если нет, то погибает. После каждого мудреца все коробки закрывают и оставшиеся мудрецы не знают о судьбе ушедших в комнату. Изначально мудрецы находятся все вместе и могут продумать план действий. Придумайте план, который гарантирует выживание всех мудрецов с вероятностью не менее $1/4$.

Задача 11. Десять человек сели в лифт на цокольном этаже дома, в котором четыре этажа. Каждый человек на каком-то этаже выходит, но этаж выбирает случайным образом. Какова вероятность того, что на каждом этаже кто-нибудь выйдет?

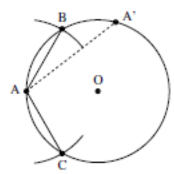
Задача 12. В научном центре работают специалисты по 63-м различным направлениям естественных наук. Известно, что по каждому разделу в центре работает ровно 7 ученых, причем вполне может быть, что один ученый является специалистом сразу по нескольким направлениям. Все ученые должны принять участие в одной (и только одной) из двух конференций, одна из которых проходит в Москве, а другая в Новосибирске. Докажите, что всегда можно так распределить ученых по этим конференциям, что на каждой конференции будут присутствовать специалисты по всем 63-м направлениям.

Remarks on the problem set 1

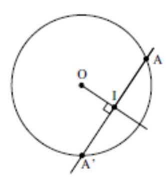
Ex 0. At the beginning of the first problem solving lecture, we argued about the following question. What is the probability that, sampling a random chord in a circle, it is longer than the radius of the circle?

The question is ambiguous. What does it really mean to sample a chord randomly? Of course, that are infinitely many distinct ways to sample randomly a chord in a circle, giving in general different answers to the question. Let's consider three ways that may appear somehow canonical, and let's check that the answer to this classical problem depends on the probability law we chose.

(1) Sample two points, say A and A', uniformly on the circle. Referring to the picture below, the wanted probability equals the probability that A' falls in the section of the circle between B and C (and not containing A).

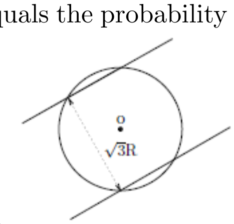


(2) Sample uniformly a point I in the circle. Next consider the chord through I and perpendicular to the radius passing at I. The probability that the chord is longer than the radius equals the probability that OI is shorter



than $\sqrt{3}r/2$.

(3) Up to an irrelevant rotation, we may fix a direction in the plane and choose uniformly a line that intersect the circle in that direction. Then the wanted probability equals the probability that this line falls out of the strip marked



in the picture.

Ex 3. The probability for one couple of dice to give $(5,6)$ or $(6,5)$ is $p = \frac{2}{36}$. Thus the required probability is $1-(1-p)^3$. To get a numerical estimation, we can think of p as *small* and remark $1-(1-p)^3 \simeq 1-(1-3p) = 3p \sim 0.167$ (while $1-(1-p)^3 \sim 0.157$). Notice that in the approximation $1-(1-p)^3 \simeq 3p$ we are neglecting the calculation of probabilities to get a successful result more than once.

Ex 4. Recall that a French deck (poker deck) of 52 cards is composed by 4 *colors* (or *suits*), each one counting 13 *kinds* (or *values*).

There are C_{52}^{13} possible 13-cards hands to give to a player. Out of those many, C_{48}^{13} contain no aces (since there are 4 aces in the deck). Thus $C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$ are the hands containing at least one ace. This could be also calculated as

$$\underbrace{C_4^1 * C_{48}^{12}}_{\text{exactly one ace}} + \underbrace{C_4^2 * C_{48}^{11}}_{\text{exactly two aces}} + \underbrace{C_4^3 * C_{48}^{10}}_{\text{exactly three}} + \underbrace{C_4^4 * C_{48}^{9}}_{\text{exactly four}}$$

As indeed the number of hands with at least two aces is $C_{52}^{13} - C_{48}^{13} - C_4^1 * C_{48}^{12}$, the probability of having at least two aces, given that one has at least one ace is

$$\frac{C_{52}^{13} - C_{48}^{13} - C_4^1 * C_{48}^{12}}{C_{52}^{13} - C_{48}^{13}} \sim 0.37$$

Consider now the case where the player states that he has the ace of spades. Then there are C_{51}^{12} (which also equals $C_{52}^{13} - C_{51}^{13}$) hands containing such an ace, and C_{48}^{12} hands containing no other ace. Thus the probability of having at least another ace is

$$\frac{C_{51}^{12} - C_{48}^{12}}{C_{51}^{12}} \sim 0.56$$

Somebody asked about the possibility to proceed somehow in a different way. You must be quite cautious about the exact information in the questions to proceed as follows, as likely you assumed facts that hold true in this exercise (due to permutation invariance), but may not hold true in other cases.

Consider the second question, when the player declares to have an ace of spades. The first (true) assumption some students had, is that the probability of not having any other ace but the ace of spades, equals the probability of turning 12 cards (out of the 51 that are not the ace of spades) in a row, without getting any other ace. This is true, but the reason will be fully justified later in the course. Since this probability is then intuitively calculated as $\frac{48}{51} \cdots \frac{37}{40}$, the required probability is

$$1 - \frac{48!39!}{36!51!} = 1 - \frac{C_{48}^{12}}{C_{51}^{12}}$$

giving the same result as above.

See the first exercise of the second problem set to understand why this reasoning cannot work for the first question.

Ex 6. Let's focus on the second question. We are asking the probability that a random permutation over N elements has no fixed point (random=we choose a permutation uniformly out of the $N!$ possible). Given $i \in \{1, \ldots, N\}$, let A_i the event *i is a fixed point*, or more formally $A_i := \{\pi \in S_N \ : \ \pi(i) = i\}$. Clearly $\mathbb{P}(A_i) = (N-1)!/N! = 1/N$, and in general if the i_j's are all distinct

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^k A_{i_j}) = \tfrac{(N-k)!}{N!}$$

Thus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\cup_{i=1}^N A_i\big) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1<i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{N+1}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^N A_i) \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \binom{k}{N} \tfrac{(N-k)!}{N!}\end{aligned}$$

Since we want to calculate the probability of the complementary of such a union we get

$$p_N := \mathbb{P}\big(\cap_{i=1}^N \bar{A}_i \big) = \sum_{k=0}^N \tfrac{(-1)^k}{k!}$$

In particular $|p_N - e^{-1}| \leq 1/((N+1)!)$.

Ex 7. Given two finite sets E and F of cardinality k and n respectively, there are k^n functions $f\colon E \to F$. The exercise thus requires the calculation of the cardinality of *surjective* functions $f\colon E \to F$, and in general the cardinality of functions with an image of cardinality exactly $r \leq n$.

Let's first calculate how many surjective functions exist, provided $k \geq n$. For $A \subset F$, define

$$\xi(A) = |\{\xi \in F^E \;:\; \xi(F) \subset A\}| = |A^E| = |A|^k$$
$$\eta(A) = |\{\xi \in F^E \;:\; \xi(F) = A\}|$$

Namely $\xi(A)$ is the number of functions with values in A, and $\eta(A)$ is the number of functions having exactly A as image. We are thus interested in $\eta(F)$.

Clearly $\xi(A) = \sum_{B \subset A} \eta(B)$. This implies

$$\eta(F) = \sum_{A \subset F} (-1)^{|F|-|A|} \xi(A) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k \tag{1}$$

Back to the general case (functions with an image of cardinality r), from (1) and recalling that there are $\binom{n}{r}$ sets of cardinality r in B, we gather that there are

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^{n-j} \binom{n}{j, r-j, n-r} j^k$$

functions with an image of cardinality exactly r.

Ex 8. The required probability coincides with the following one. Sample x and y uniformly and independently in $\{1/N, 2/N, \ldots, 1\}$, and let P_N be the probability that (x, y) falls with the (quadrant) circle of radius 1. As $N \to \infty$, we can simply use the fact that the circle is Riemann-measurable to argue that $P_N \to \pi/4 =$ measure of the circle / measure of $[0,1]^2$, as indeed squares with sides $1/N$ on $[0,1]^2$ provide a Riemannian mesh. The same approach would work for any Riemman-measurable subset of $[0,1]^2$.

On the other hand, the sharp asymptotic behavior of the quantity $P_N - \pi/4$ is quite a hard problem. Several celebrated mathematicians worked on the problem, including Gauss, Hardy and E.Landau.

Ex 9. To fix the notation, let's say that at the beginning there were n mathches in each pocket. Let's calculate the probability that the man finds the *right* pocket empty, and that at this moment there are k matches in the left pocket. For this to happen, the man must choose the right pocket n times out of $n + n - k$ tries, and then he must choose right yet again at the $2n - k + 1$-th try. Thus this probability equals $\frac{1}{2}\binom{2n-k}{n} 2^{-2n+k}$. The required probability is then $\binom{2n-k}{n} 2^{-2n+k}$ since the left pocket could be also found empty first.