# Лекция 9. Непрерывные функции и компактные множества.

## 1 Непрерывность сложной функции.

Функция - это отображение множества (области определения) в прямую. Сложная функция - это композиция, т.е. последовательное выполнение двух отображений. Перейдем к подробным определениям.

**Определение 1** *Пусть $X, Y$ - подмножества прямой, $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ - два отображения, причем $f(X) \subset Y$. Тогда определена композиция отображений*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)). \tag{1}$$

Формула (1) имеет смысл, поскольку для каждого $x \in X,\ f(x) \in Y$, а отображение $g$ определено на $Y$.

**Теорема 1** *Пусть $f$ - непрерывная функция на интервале $X$, $g$ - непрерывная функция на интервале $Y$, и $f(X) \subset Y$. Тогда $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция.*

**Доказательство** Пусть $x \in X$ - произвольная точка. Докажем, что функция $h = g \circ f$ непрерывна в точке $x$. Возьмем произвольную окрестность $U$ точки $g(f(x))$. Поскольку функция $g$ непрерывна, существует окрестность $V$ точки $f(x)$ такая, что $g(V) \subset U$. Поскольку функция $f$ непрерывна, существует окрестность $W$ точки $x$ такая, что $f(W) \subset V$. Следовательно, $g(f(W)) \subset g(V) \subset U$. $\square$

## 2 Теорема об обратной функции.

Не всякая функция является биекцией. Например, $f(x) = x^2$ отображает всю прямую на положительную полуось; при этом в каждое положительное число $x$ переходят два числа: $\pm\sqrt{x}$. Если же функция $f : X \to \mathbb{R}$ осуществляет биекцию на свой образ $f : X \to f(x)$, то определено обратное отображение, называемое обратной функцией:

$$f^{-1} : f(X) \to X.$$

Следующая теорема дает достаточное условие для существования и непрерывности обратной функции.

**Теорема 2** *Пусть $f$ - непрерывная строго монотонная функция на интервале $I$, конечном или бесконечном. Тогда образ $J = f(I)$ - интервал, и определена непрерывная обратная функция $f^{-1} : J \to I$.*

Отметим, что взаимно однозначное отображение интервалов, непрерывное вместе с обратным, называется *гомеоморфизмом.*

Докажем, что $J$ выпукло. Одновременно докажем, что отображение $f : I \to J$ биекция.

**Доказательство** Возьмем две произвольные точки $c, d \in J,\ c < d,\ c = f(a),\ d = f(b),\ a, b \in I$. Возьмем произвольную точку $\alpha \in (c, d)$. Поскольку функция $f$ непрерывна, к ней можно применить теорему о промежуточном значении. Она говорит, что на отрезке $[a, b]$ функция $f$ принимает все значения между $c$ и $d$. Следовательно, существвует $\beta \in (a, b) : f(\beta) = \alpha$. В силу строгой монотонности $f$ такая точка $\beta$ единственна.

Итак, вместе слюбыми двумя точками $J$ содержит соединяющий их отрезок. Значит, $J$ выпукла. Мы доказали биективность отображения $f : I \to J$.

Докажем открытость $J$. Пусть $\alpha \in J$ - произвольная точка, $\alpha = f(\beta),\ \beta \in I$. Возьмем $a < \beta < b,\ a, b \in I$, и $c = f(a),\ d = f(b)$. В силу строгой монотонности $f$, $c < \alpha < d$. Мы доказали, что $(c, d) \subset J$. Значит, $J$ открыто.

По лемме 2 лекции 6, $J$ - интервал.

Докажем непрерывность $f^-1$. Фактически, она уже доказана. Возьмем произвольное $\alpha = f(\beta) \in J$. Пусть $(a, b),\ a < \beta < b$ - произвольная окрестность точки $\beta$. Положим, как и раньше, $c = f(\alpha),\ d = f(b)$. Мы доказали, что $f^{-1}(c, d) = (a, b)$. Это значит, что отображение $f^{-1}$ переводит окрестность $(c, d)$ точки $\alpha$ в заданную окрестность $(a, b)$ точки $\beta$. Значит, функция $f^{-1}$ непрерывна. $\square$

# 3 Локальная теорема об обратной функции.

**Теорема 3** *Пусть функция $f$ непрерывна на интервале и строго монотонна в некоторой окрестности $U$ точки $\beta$. Тогда у точки $\alpha = f(\beta)$ существует окрестность $V$, на которой определена непрерывная функция $f^{-1} : V \to U$, $f : f^{-1} \circ f = \ id\ $ на $U$.*

**Доказательство** Применяем предыдущую теорему к ограничению функции $f$ на $U$. По предыдущей теореме, в которой роль $U$ играл интервал $I$, существует непрерывная обратная функция $f^{-1}$ на интервале $J = f(I)$. Интервал $J$ возьмем за $V$. $\square$

# 4 Функции на множествах.

До сих пор мы рассматривали непрерывные функции только на интервалах. Удобство состояло в том, что у каждой точки интервала есть окрестность, принадлежащая этому интервалу.

Если мы хотим определить непрерывные функции на отрезке, не продолжая ее на интервал, нам нужно определить, что такое окрестность концевой точки отрезка, состоящая только из точек этого отрезка, чтобы потом говорить, что функция эту окрестность куда-то переводит. Но если уж определять непрерывную функцию на отрезке, то давайте определим непрерывную функция на любом подмножестве прямой.

Сначала определим окрестность точки в множестве.

**Определение 2** *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ - произвольное множество. Окрестностью точки $x \in X$ в множестве $X$ называется пересечение с $X$ любого интервала, содержащего $x$.*

Таким образом, изолированная точка множества $x$ сама оказывается своей окрестностью. Окрестностью конца $a$ отрезка $[a, b]$, $a < b$, является полуинтервал вида $[a, c)$, $c \in [a, b]$, а также сам отрезок $[a, b]$. Окрестностью точки Канторова множества, принадлежащей отрезку ранга $n$, является сам этот отрезок.

**Определение 3** *Функция, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}$, называется* непрерывной*, если для любого $x \in X$ и любой окрестности $U$ точки $f(x)$, существует окрестность $V$ точки $x$ в множестве $X$ такая, что $f(V) \subset U$.*

# 5 Второе определение непрерывной функции на множестве.

Второе определение непрерывной функции на множестве совпадает со вторым определением непрерывной функции на интервале, только интервал всюду заменяется на область определения функции.

**Определение 4** *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $X$ , если для любой точки $x$ этого множества и любой последовательности точек $x_n \in X$, сходящейся к $x$, выполнено: $f(x_n) \to f(x)$.*

**Задача 1** *Докажите эквивалентность двух определений непрерывной функции на множестве.*

Это доказательство почти дословно такое же, как в случае интервала.

# 6 Компактные множества.

## 6.1 Определение

Компактные множества похожи на отрезок, и непрерывные функции на них ведут себя, как на отрезке.

**Определение 5** *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется компактным, если из каждой последовательности $(x_n \in X)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$.*

**Пример 1** *Отрезок компактен. Компактен ли интервал? Вся прямая?*

## 6.2 Критерий компактности.

**Теорема 4** *Подмножество прямой компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

**Доказательство** Пусть множество компактно, но не ограничено. Тогда для каждого $n$ существует $x_n \in X : |x_n| > n$. Последовательность $x_n \to \infty$ и не имеет сходящейся подпоследовательности - противоречие.

Пусть множество компактно, но не замкнуто. Тогда у него существует предельная точка ему не принадлежащая. По определению, к ней сходится последовательность $(x_n \in X)$. Тогда любая подпоследовательность $(x_{n_k})$ сходится к той же точке $a \notin X$. Противоречие.

Пусть множество $X$ замкнуто и ограничено. Возьмем отрезок $\sigma = [-M, M] \supset X$. Он существует в силу ограниченности $X$. Возьмем произвольную последовательность $(x_n \in X)$. Она принадлежит отрезку $\sigma$ и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in \sigma$. Но тогда $a$ - предельная точка множества $X$ и принадлежит ему в силу замкнутости. □

# 7 Непрерывные функции на компактных множествах.

**Теорема 5** *Любая непрерывная функция на компактном множестве ограничена и достигает своего минимума и максимума.*

Равномерная непрерывность функции на любом множестве определяется так же, как на отрезке.

**Теорема 6** *Любая непрерывная функция на компакном множестве равномерно непрерывна на нем.*

Обе теоремы доказываются дословно так же, как и для непрерывных функций на отрезке. Используется только определение непрерывности через последовательности и возможность выбора сходящейся подпоследовательности из последовательности точек компакта.