24.10.2017 | Классическая теория поля | =1=

Лекция №7

На прошлом занятии мы получили пример возможного динамического уравнения для простейшего вида полей — скалярного поля $\varphi(x) \equiv \varphi(x^0, \vec{x})$:

$$\Box \varphi(x) = 0 \quad (\star)$$

Напомним обозначения:

$$\Box := g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$$

— Пуанкаре-инвариантный оператор Даламбера. Требование инвариантности всего волнового уравнения $(\star)$ приводит к такому трансформационному свойству скалярного поля при действии преобразований из группы Пуанкаре:

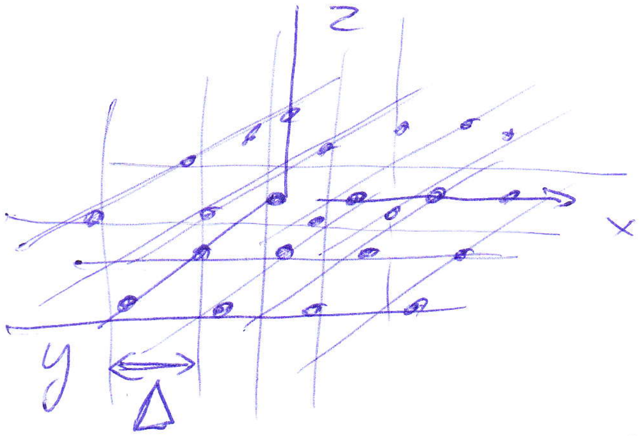
$\pi = (\Lambda, a) \in$ гр. Пуанкаре:

$\pi \triangleright x = x' \; : \; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

$\pi \triangleright \varphi = \varphi' \; : \; \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$, или

$$\varphi'(x') = \varphi(x).$$

Заметим, что волновое уравнение (*) мы получили как предел дискретной системы осцилляторов:



$$q_{n_1 n_2 n_3}(t) = q(\Delta n_1, \Delta n_2, \Delta n_3, t) =$$

$$n_i \in \mathbb{Z}$$

$$= q(\vec{x}_{n_1 n_2 n_3}, t) \xrightarrow[\Delta \to 0]{} \varphi(\vec{x}, t)$$

$$\vec{x}_{n_1 n_2 n_3} = \begin{pmatrix} \Delta \cdot n_1 \\ \Delta \cdot n_2 \\ \Delta \cdot n_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, координаты $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ "нумеруют" динамические переменные, которые эволюционируют во времени

$$\varphi(\vec{x}, t).$$

В каждой точке пространства $\mathbb{R}^3$ задана меняющаяся во времени динамическая переменная.

Получим теперь действие полевой системы и посмотрим, какие релятивистски инвариантные обобщения уравнения $\Box \varphi = 0$ можно получить.

Зафиксируем некоторую систему отсчёта и, по аналогии с классической механикой, будем считать, что известна полевая конфигурация в моменты t_1 и $t_2 > t_1$ по часам данной системы отсчёта

$$\varphi(x_1^0, \vec{x}) = \varphi_1(\vec{x}) \qquad \varphi(x_2^0, \vec{x}) = \varphi_2(\vec{x}) \ -$$

— граничные значения.

Нам нужно построить функционал от полевых конфигураций $\varphi(x^0, \vec{x})$ (аналог функционала от траекторий $q_{n_1 n_2 n_3}(t)$) со следующими общими свойствами:

- Уравнение поля были бы следствием условия экстремальности действия $\delta S = 0$ с заданными граничными условиями.
- Действие должно быть Пуанкаре-инвариантным вещественным скаляром.

Действие представим в виде

$$S = \int_{ct_1}^{ct_2} c\,dt\, L\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}\right).$$

Лагранжиан L обязательно должен зависеть от <u>всех</u> производных поля φ, а не только от $\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$ ("скорости" изменения динамических переменных).

Дело в том, что при преобразованиях Лоренца x^0 и $\vec{x}$ перемешиваются

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$ – (пример буста).

и если в <u>какой-то</u> системе отсчёта L будет содержать $\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$, то после <u>только</u> преобразований из группы Лоренца появятся производные $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}$. Здесь мы используем удобное обозначение для оператора градиента:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{x}} \equiv \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix}$$

В ~~к~~ дискретном случае L включал сумму по всем динамическим переменным:

$$L = \sum_{n_1 n_2 n_3} \frac{m\dot{q}^2_{n_1 n_2 n_3}}{2} + \text{взаимодействие}.$$

Для полевой системы мы

имеем "континуальное число" переменных и сумма должна заменится интегралом по $\mathbb{R}^3$:

$$L = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)\, dx^1 dx^2 dx^3 \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Здесь мы применили ещё одно сокращённое обозначение для многомерных интегралов, которым будем регулярно пользоваться в дальнейшем. Кроме того, меру интегрирования будем писать сразу после знака интеграла, а не после подынтегрального выражения, как это обычно принято:

$$\underbrace{\int f(x)\, dx}_{\text{Традиционная запись}} \longrightarrow \underbrace{\int dx\, f(x)}_{\text{Наше соглашение.}}$$

Выражение $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ часто называют лагранжевой плотностью. Мы будем $\mathcal{L}$ тоже называть лагранжианом (это общеупотребительный термин), поскольку в полевых теориях работают практически исключительно с $\mathcal{L} = \mathcal{L}$, а не с $L = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}$.

Ну и наконец сделаем замечание о граничных условиях. Гиперповерхности постоянного времени $x_1^0 = const$ и $x_2^0 = const$ в пространстве Минковского M_4 при преобразованиях группы Пуанкаре переходят в некоторые "пространственно-подобные" гиперповерхности Σ_1 и Σ_2. Это такие поверхности, касательные вектора к которым в $\forall$ их точке пространственно-подобны: $a^\mu a_\mu < 0$. Таким образом, $\forall$ 2 точки пространственно-подобной поверхности разделены пространственно-подобным интервалом. Поэтому на такой поверхности можно произвольно фиксировать граничные значения полей (т.е. задавать значение поля в любой точке независимо от его значений в соседних точках) без опасности получить противоречие с динамикой системы (как мы уже отмечали, ~~точки~~ события в пространственно-подобных точках не могут находиться в причинно-следственной связи друг с другом).

Итак, общий вид действия для скалярного поля

$$S[\varphi] = \int\limits_{\Omega \subset M_4} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$$

Ω часто будем брать в виде

$$\Omega = [ct_1, ct_2] \times \mathbb{R}^3 \text{ или}$$

$$\Omega = [ct_1, ct_2] \times V \subset \mathbb{R}^3$$

ограниченная область в $\mathbb{R}^3$.

В качестве $\mathcal{L}$ выберем инвариантное выражение:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - V(\varphi).$$

Здесь $\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi \equiv g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}$,

а $V(\varphi)$ – произвольная (гладкая) функция. Например, полином

$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \lambda\varphi^3 + \gamma\varphi^4$, или $V(\varphi) = \cos(\varphi)$ и т.д.

Вид лагранжиана, помимо явной Пуанкаре-инвариантности, допускает интерпретацию, аналогичную классической механике частиц:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_0 \varphi)^2}_{} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi - V(\varphi)$$

Квадрат скорости → "кинетическая энергия"

$+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi$ → "упругое взаимодействие"

$V(\varphi)$ → обобщение взаимодействия.

Конечно, это не более, чем аналогия. Для полевых систем нельзя "определить "кинетическую энергию" в силу лоренцевской <u>неинвариантности</u> выражения $\frac{1}{2}\partial_0\varphi\partial_0\varphi$, а след от упругого "взаимодействия" $-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi$ войдёт в уравнение <u>свободного поля</u>. Вообще, как мы увидим, <u>квадратичные</u> по полям слагаемые $\mathcal{L}$ приводят к <u>линейным</u> по φ уравнениям. <u>Линейные</u> уравнения описывают <u>свободные</u> поля.

Рассмотрим теперь "вариацию" = 9 = полевой конфигурации" $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) + \delta\varphi(x),$$

где $\delta\varphi(x)$ – "малая добавка".

Зам. Поскольку $\delta\varphi$ для нас будет только техническим инструментом для вывода уравнений Эйлера-Лагранжа, мы не будем заниматься строгим построением меры на пространстве полей, которая позволит уточнить понятие "малая добавка". Для наших целей будет достаточно представлять себе $\delta\varphi$ как гладкую скалярную функцию, модуль которой (и модуль её производных) в каждой точке пространства Минковского малы по сравнению с $\varphi(x)$ и $\int(\ldots)(\delta\varphi)^2 d^4x$ – пренебрежимо мал по сравнению с $\int(\ldots)\delta\varphi\, d^4x$. Например, можно считать $\delta\varphi(x) = h(x)\varepsilon$, где $h(x)$ – скалярное поле (независимое от $\varphi(x)$), а $\varepsilon \to 0$.

Вычислим вариацию действия, которую определим как <u>линейную</u> по $\delta\varphi$ часть приращения $S[\varphi+\delta\varphi]-S(\varphi)$:

$$\delta S[\varphi] = \left(S[\varphi+\delta\varphi] - S[\varphi]\right)\Big|_{\substack{\text{линейная}\\ \text{часть по } \delta\varphi}} =$$

$$= \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu(\varphi+\delta\varphi)\partial^\mu(\varphi+\delta\varphi) - V(\varphi+\delta\varphi) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi + V(\varphi) \right)\Big|_{\substack{\text{линейная}\\ \text{часть по } \delta\varphi}} =$$

$$= \int\limits_\Omega d^4x \left((\partial_\mu\delta\varphi)\,\partial^\mu\varphi - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}\delta\varphi \right).$$

Тождественно преобразуем первое слагаемое:

$$(\partial_\mu\delta\varphi)\partial^\mu\varphi \equiv \partial_\mu(\delta\varphi\,\partial^\mu\varphi) - \delta\varphi(\partial_\mu\partial^\mu\varphi) =$$
$$= \partial_\mu(\delta\varphi\,\partial^\mu\varphi) - \delta\varphi\,\Box\varphi.$$

С учётом этого, получаем для δS:

$$\delta S[\varphi] = -\int\limits_\Omega d^4x \left(\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \int\limits_\Omega d^4x\,\partial_\mu(\delta\varphi\,\partial^\mu\varphi).$$

Последнее слагаемое — интеграл по Ω от 4-дивергенции

$$\partial_\mu(\delta\varphi\,\partial^\mu\varphi) = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right) - \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}\right) -$$

равно нулю с учётом граничных значений на $\delta\varphi$ и φ:

$$\int\limits_{\Omega} d^4x\, \partial_\mu(\delta\varphi\, \partial^\mu \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \int\limits_{ct_1}^{ct_2} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right) -$$

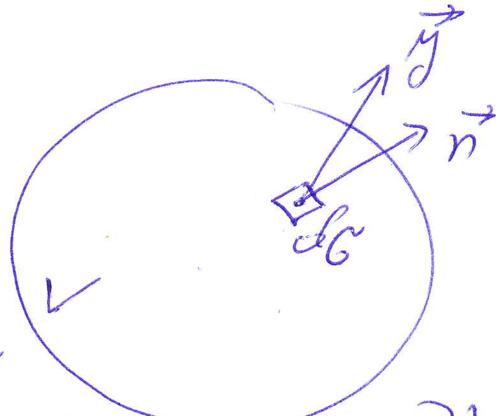
$\Omega = [ct_1, ct_2]\times\mathbb{R}^3$

$$- \int\limits_{ct_1}^{ct_2} dx_0 \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}\right)}. \qquad (*)$$

Это $\int$л от 3-дивергенции векторного поля $J_i = \delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_i J_i = \lim_{V\to\infty}\int\limits_{V} d^3x\, \partial_i J_i = (\text{т. Гаусса}) =$$

$$= \lim_{V\to\infty}\int\limits_{\partial V} J_i n_i \underbrace{d\sigma}_{\text{элемент площади границы } \partial V}.$$



$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ — внешняя нормаль к ∂V в точке, $d\sigma$ — элемент площади поверхности ∂V.

Будем считать, что поле $\varphi(x)$ и их вариации $\delta\varphi(x)$ убывают на пространственной бесконечности $|\vec{x}|\to\infty$ быстрее $\frac{1}{|\vec{x}|}$. Поскольку площадь границы V при $|\vec{x}|\to\infty$ растёт как $|\vec{x}|^2$, то с такими граничными условиями получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}\right) = \lim_{V\to\infty} \int\limits_{\partial V} \delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

Таким образом, второе слагаемое в (*) равно нулю. Первое слагаемое зануляется при учёте нулевых вариаций поля в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени:

$$\delta\varphi(x)\Big|_{x^0=ct_1} = \delta\varphi(x)\Big|_{x^0=ct_2} \equiv 0:$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \int\limits_{ct_1}^{ct_2} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\left(\delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)\Big|_{x^0=ct_2} - \left(\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)\Big|_{x^0=ct_1}\right) \equiv 0.$$

Итак, интеграл от 4-дивергенции в вариации действия исчезает и мы получаем:

$$\delta S[\varphi] = -\int\limits_{\Omega} d^4x \left(\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\right)\delta\varphi.$$

В силу произвольности $\delta\varphi$ в области Ω, требование $\delta S[\varphi]=0$ при $\forall\,\delta\varphi$ даёт уравнение

$$\boxed{\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0}$$

При $V\equiv 0$ мы возвращаемся к волновому уравнению $\Box\varphi = 0$.

Предположим, что нулевое поле $\varphi(x)=0$ ~~образует~~ — даёт минимум потенциала $V(\varphi)$: $V(\varphi)=0$ (этого всегда можно добиться сдвигом V на константу), $\left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}=0$,

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = m^2 > 0 \quad (\text{минимум}).$$

То есть, пусть $V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2} + V_{вз}(\varphi)$, где разложение $V_{вз}(\varphi)$ начинается со слагаемых φ^3 или старше. Эта часть V называется потенциалом взаимодействия (самодействия) поля.

Тогда уравнение движения примет вид:

$$\boxed{(\Box + m^2)\varphi(x) = -\frac{dV_{вз}(\varphi)}{d\varphi(x)}}$$

Если же конкретизировать вид Лагранжиана, то вариация действия приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа полевой системы.

Пусть $\mathcal{L}$ зависит от набора полей $\varphi^A(x)$ $A = 1, 2, \dots, n$. Это могут быть поля любой природы, не только скалярные. Например, 4-х векторное поле $A^\mu(x)$ имеет 4 компоненты, которые при трансляциях ведут себя как 4 скалярных поля, то есть:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x-a) \quad \left(A'^\mu(x') = A^\mu(x)\right)$$

а при преобразованиях Лоренца закон трансформации 4-векторного поля таков $x \to x' = \Lambda x$

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x),$$

или $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$.

Этим 4 компоненты вектор-ного поля A^μ отличаются от набора 4х <u>скалярных</u> полей φ^A $A=1,2,3,4$.
Для четвёрки скалярных полей (как, впрочем, и для любого их числа) закон преобразования проще:

$$x \to x' = \Lambda x \qquad \varphi'^A(x') = \varphi^A(x)$$

— разные поля не перемешиваются друг с другом.

Итак, $\mathcal{L} = \sum_{A=1}^{N} \alpha\, \partial_\mu \varphi^A \partial^\mu \varphi^A - V(\varphi)$

α - числовой множитель.

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left(\mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial\varphi + \partial\delta\varphi) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right)\Big|_{\substack{\text{лин.}\\ \text{по } \delta\varphi}} =$$

$$= \int_\Omega d^4x \left(\sum_{A=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} \delta\varphi^A + \sum_{A=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \partial_\mu \delta\varphi^A \right) =$$

$$= \int_\Omega d^4x \left(\sum_{A=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \right) \right) \delta\varphi^A + \underbrace{\sum_{A=1}^{N} \partial_\mu \left(\delta\varphi^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \right)}_{\text{граничные члены}} \right).$$

Вклад от граничных членов равен нулю в силу условий на $\delta\varphi^A$ в моменты t_1 и t_2 и асимптотик полей и вариаций на пространственной ∞ $|\vec{x}| \to \infty$.

Требование $\delta S = 0 \;\forall\; \delta\varphi$ дает уравнения Эйлера-Лагранжа полевой системы:

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A} = 0 \quad A = 1, 2, \ldots, n.}$$

Зам. Нужно соблюдать аккуратность в написании индексов пространства Минковского у производных, чтобы всегда получать Лоренц-инвариантные выражения.

Например, если $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$, то

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi\right) =$$

$$= g^{\mu\alpha}\partial_\alpha \varphi = \partial^\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

Таким образом, $\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) = \partial_\mu(\partial^\mu \varphi) =$

$= \Box\varphi$ — инвариантное выражение.

Тождественно равная запись:

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi)}\right) = \partial^\mu(\partial_\mu\varphi).$$

Рассмотрим случай свободного массивного скалярного поля (вещественного): $V_{вз}(\varphi) \equiv 0$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

Это <u>уравнение Клейна-Гордона</u>.

Попробуем найти какое-нибудь его <u>решение</u>. Поскольку это линейное уравнение с <u>постоянными</u> коэффициентами при производных, естественно искать <u>решение</u> в виде <u>плоских волн</u>

$$\varphi_p(x) = A(p)e^{ipx},$$

где $px = p^\mu x_\mu = p^0x^0 - \sum_{i=1}^{3} p^i x^i \equiv p^0x^0 - \vec{p}\vec{x}$.

Своё название плоские волны получили из-за того, что поверхность постоянной фазы у <u>решения</u> $\varphi_p(x)$ — плоскость в $\mathbb{R}^3$: $p^0x^0 - \vec{p}\vec{x} = const$, с течением времени (рост x^0)

эти плоскости перемещаются в $\mathbb{R}^3$ параллельно самим себе в направлении вектора $\frac{\vec{p}}{p^0}$.

~~II~~ Заметим, что

$$\partial_\mu e^{ipx} = e^{ipx} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (i p_\alpha x^\alpha) = i p_\mu e^{ipx}$$

$$\Box e^{ipx} = \partial^\mu \partial_\mu e^{ipx} = i p_\mu \partial^\mu e^{ipx} =$$

$$= (i p_\mu)(i p^\mu) e^{ipx} =$$

$$\underline{\underline{= -p^2 e^{ipx}}}$$

Таким образом:

$$(\Box + m) \varphi_p(x) = A(p)(-p^2 + m^2) e^{ipx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = m^2.$$

Итак, 4-вектор p^μ надо выбирать не произвольно, а на "массовой поверхности":

$$0 = p^2 - m^2 \equiv p^\mu p_\mu - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$$

$$(p^0)^2 = m^2 + \vec{p}^2$$

Это похоже на связь энергии и

импульса релятивистской частицы: $\left(\frac{E}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}$

в системе единиц, где $c = 1$.

Итак, мы нашли 3-х параметрическое семейство плоских волн ($\vec{p}$ — произвольный 3-вектор).

Однако, плосковолновое решение не физическое: оно $\exists$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ (не стремится к 0 при $|\vec{x}| \to \infty$) и на всей временной оси (всегда было и всегда будет). Пользуясь линейностью уравнения Клейна-Гордона попробуем составить суперпозицию (линейную комбинацию) плоских волн:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \alpha(p). \quad (\star\star)$$

Для достижения явной Лоренц-инвариантности мы пока откажемся от условия массовой поверхности и рассмотрим все плоские волны ($\forall p^2$) с амплитудами $\alpha(p)$.

Условие вещественности $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$ даёт $\overline{\alpha}(p) = \alpha(-p)$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ С математической точки зрения формула ($\bigstar\bigstar$) есть обратное преобразование Фурье $\alpha(p^0, \vec{p}) \longrightarrow \varphi(x^0, \vec{x})$. Прямое преобразование Фурье: $\alpha(p) = \int\limits_{M_4} d^4x\, e^{ipx} \varphi(x)$.

Преобразование Фурье существует для весьма широкого класса функций (например, для абсолютно интегрируемых ф-ций на M_4). Ниже мы уточним класс функций, где будем искать решение нашего уравнения.

Что ещё нужно потребовать от амплитуд $\alpha(p)$, кроме $\overline{\alpha}(p) = \alpha(-p)$? Волновой пакет ($\bigstar\bigstar$) должен быть скалярной функцией: $\varphi'(x') = \varphi(x)$.

$$\varphi'(x') = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, e^{-iqx'} \alpha'(q) = \Big\{$$ Делаем замену переменной интегрирования:

$q^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \Rightarrow d^4 q = |\det \Lambda| d^4 p = d^4 p$, т. к. для преобразований Лоренца $|\det \Lambda| = 1$.

$$q\cdot x' = g_{\alpha\beta} q^\alpha \Lambda^\beta{}_\nu x^\nu = \underline{g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu} p^\mu \underline{\Lambda^\beta{}_\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p\cdot x$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \alpha'(\underbrace{\Lambda p}_{p'}) = \varphi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \alpha(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'(p') = \alpha(p), \text{ где } p' = \Lambda p.$$

Что происходит при трансляциях?

$x \to x' = x + a \qquad \varphi'(x) = \varphi(x-a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha'(p) = e^{+ip\cdot a} \alpha(p).$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Это согласуется с рядом Тейлора:

$$\varphi(x-a) = \exp(-a^\mu \partial_\mu)\varphi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \underline{\exp(-a^\mu\partial_\mu) e^{-ipx}} \alpha(p) =$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{+ia\cdot p} e^{-ipx} \alpha(p)$$

Подставим теперь разложение (**) в уравнение Клейна-Гордона:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} (-p^2 + m^2)\alpha(p) = 0 \Rightarrow \boxed{(p^2 - m^2)\alpha(p) = 0,}$$

так как преобразование Фурье обратимо.

В простр. M_4 многообразие $p^2 = m^2$ имеет меру нуль, поэтому решения этого алгебраического уравнения:

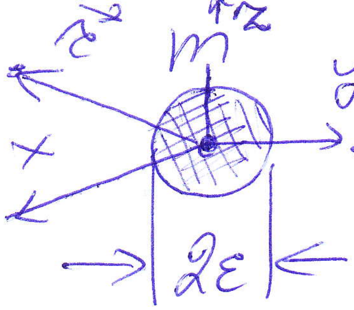
$$\alpha(p) = \begin{cases} 0, & p^2 \neq m^2 \\ \forall\, a(p) & \text{при } p^2 = m^2 \end{cases}$$

приведут к $\varphi(x) \equiv 0$.

Выход предлагается такой: расширить класс функций, среди которых мы ищем $\alpha(p)$ и допустить решения в виде "обобщенных функций" – линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций.

Подробно теория обобщенных ф-ций излагается в книжках В. Владимирова, названных в начале первой лекции. Мы напомним только некоторые определения и необходимые свойства (без подробных доказательств).

Фактически, нам будут нужны свойства одной из самых известных обобщенных функций – дельта-функции Дирака (обозначение: δ-функция). Понятие (трехмерной) δ-функции появляется при попытке описать плотность распределения массы (или электрического заряда) точечной частицы.



$$\rho_\varepsilon(\vec r) = \begin{cases} \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} & |\vec r| \le \varepsilon \\ 0 & |\vec r| > \varepsilon \end{cases}$$

Плотность массы точечной частицы $m\,\delta^{(3)}(\vec r)$ есть предел ступенчатых функций $\rho_\varepsilon(\vec r)$ при $\varepsilon \to 0$.

Видно, что поточечный предел $\varepsilon\to 0$ не существует: $\delta(\vec r)$ не может считаться функцией в пространстве $\mathbb{R}^3$ в обычном смысле.

Однако, существует слабый предел $\varepsilon \to 0$ на пространстве функций, непрерывных в некоторой окрестности $\vec r = 0$: Для $\forall$ такой $f(\vec r)$ начиная с достаточно малого ε существует интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec r)\,\rho_\varepsilon(\vec r)\,d^3 r$$

(когда шар $|\vec r| \le \varepsilon$ начнет целиком попадать в окрестность непрерывности функции f). Легко показать, что

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec r)\,\rho_\varepsilon(\vec r)\,d^3 r = m\,f(0)$$

Символически это записывают так

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta^{(3)}(\vec{r}) f(\vec{r})\, d^3 r = f(0)$$

Таким образом, ~~...~~ δ-функция Дирака это линейный функционал на пространстве основных функций $f(\vec{r})$, задающий отображение $f(\vec{r}) \mapsto f(0)$.

В качестве пространства основных функций часто берут пространства <u>финитных</u> функций или пространство быстро убывающих функций (пространство Шварца), обозначаемые $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ соответственно. Их определение таковы:

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: пространство ∞ дифференцируемых функций от n переменных ($\in \mathbb{R}^n$), тождественно равных нулю <u>вне</u> шара в $\mathbb{R}^n$ некоторого конечного радиуса (своего для каждой функции).

Или, это пространство ∞ дифф. функций с компактным носителем.

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций: это тоже множество ∞ дифф. в $\mathbb{R}^n$ функций, которые вместе с любыми своими производными спадают на ∞ быстрее любого полинома:

$$\lim_{x_i \to \infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} = 0 \qquad m = m_1 + \dots + m_n$$

для $\forall (k_1, \dots, k_n) \geq 0$ и $\forall (m_1, \dots, m_n) \geq 0$.

Очевидно, $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Важный пример функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ("шапочка"):

$$f_a(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq a^2 \\ \exp\left(-\dfrac{a^2}{(a^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2)}\right) \end{cases}$$

Ясно, что для $\forall\ \varphi(x_1 \dots x_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ произведение $\varphi f_a \in \mathcal{D}$.

Функция из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$.

Теперь для $\forall\ \infty$ дифф. функции φ, растущей (вместе со своими производными) не быстрее полинома фиксированного порядка, $\varphi \exp(-x_1^2 - \ldots - x_n^2) \in \mathcal{Y}$.

На пространстве $\mathcal{D}$ любая локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция ψ задает линейный функционал по правилу:

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \psi: f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f(x)\, \psi(x).$$

Иногда говорят, что это <u>ядерный линейный</u> функционал с <u>ядром</u> $\psi(x)$. В этом смысле $\delta^{(n)}(\vec{r})$ не ядерный функционал, т.к. нет <u>ф-ции</u> $\delta(\vec{r})$, но, для работы с δ-функцией удобно ввести фиктивное ядро $\delta^{(n)}(\vec{r})$ и записать действие функционала Дирака в виде интеграла:

$$\delta^{(3)}[f] = f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f(x_1 \ldots x_n)\, \delta^{(n)}(\vec{x}).$$

Рассмотрим $n = 1$. $\delta(x)$ в $\mathbb{R}^1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0).$$

Более общее определение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

δ-функция, "сосредоточенная" в $x=a$.

Отметим, что с такими выражениями можно формально работать как с обычными интегралами. Например, делаем замену переменных $x-a=y$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(y+a)}_{\tilde f(y)}\,\delta(y)\,dy =$$

$$= \tilde f(0) = f(a)$$

$\delta(y)$ и $\delta(x-a)$ получаются друг из друга сдвигом переменной под знаком интеграла.

$\boxed{\text{Упр.}}$ Тем же приёмом докажите

(i) $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

(ii) $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$ для $\forall$ основной функции $f(x)$.

Здесь равенство функционалов понимается в смысле равенства их

<u>действие</u> на $\forall$ основную функцию.

(iii) $\boxed{V}$ Пусть $g(x)$ — непрерывно дифф. функция с <u>простыми</u> нулями:

$$g(x_k)=0 \quad g'(x_k)\neq 0.$$

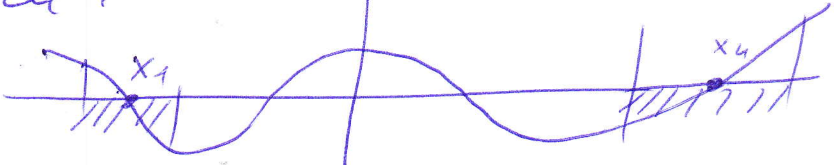
Тогда $\delta(g(x)) = \sum\limits_k \dfrac{\delta(x-x_k)}{|g'(x_k)|}$,

то есть, для $\forall$ основной функции $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \sum_k \frac{f(x_k)}{|g'(x_k)|}$$

(сумма по <u>всем</u> нулям $g(x)$)

<u>Доказательство</u>! $g'(x_k)\neq 0 \Rightarrow \exists$ окрестность x_k, в которой $g(x)$ — строго монотонна:



Рассмотрим одну из таких окрестностей: $g(x_k)=0$

$$\int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Делаем замену} \\ y=g(x) \Leftrightarrow x=\varphi(y) \\ dx=\dfrac{dy}{g'(x)\neq 0 \text{ в окрестности}} \\ \underline{x_k=\varphi(0)} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{y_1<0}^{y_2>0} f(\varphi(y))\,\delta(y) \frac{dy}{|g'(x)|}\Bigg|_{x=\varphi(y)} = \frac{f(\varphi(0))}{|g'(\varphi(0))|} =$$

Но $\varphi(0) = x_k$

$$= \frac{f(x_k)}{|g'(x_k)|}.$$

(iv) Доказать $\exists$ слабых пределов

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$$

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\pi x} = w\text{-}\lim_{R\to\infty} \frac{\sin Rx}{\pi x} = \delta(x)$$

Производная обобщенной функции.

Если $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $\frac{d\psi}{dx}$ тоже из $\mathcal{D}$ и обе эти функции определяют ядерные функционалы на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \psi', f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{dx} f(x)\,dx = \left(\text{Берём по частям, на } \infty \text{ все функции} \equiv 0\right) =$$

$$= -\int \psi(x) \frac{df}{dx}\,dx = -\langle \psi, f' \rangle.$$

Для произвольной обобщён- =30=
ной функции это служит
определением производной:

Если ξ — обобщ. функция на $\mathcal{D}$,
то ξ' — тоже обобщённая ф-ция
на $\mathcal{D}$, причём:
$$\langle \xi', f \rangle := -\langle \xi, f' \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\langle \xi^{(n)}, f \rangle = (-1)^n \langle \xi, \frac{d^n f}{dx^n} \rangle$.

В частности: $\int \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} f(x)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

$\boxed{\text{Упражнение:}}$ $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ —
обобщённая функция на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:
$$\langle \theta, f \rangle = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$
Докажите, что $\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$.

Преобразование Фурье $F[f](p)$:
$$\tilde{f}(p) = \int e^{ipx} f(x)\,dx$$

Полезное свойство пространства
Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: оно инвариантно

относительно преобразования Фурье: если $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то

$$\tilde{f}(p) = F[f](p) \text{ тоже } \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Зам. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ не инв. относит. Фурье: Фурье-образ функции с компактным носителем это функция из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (носитель не компактен).

На обобщённых функциях действующих на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ определим преобразование Фурье так:

$$\langle F[\xi], f \rangle = \langle \xi, F^{*}[f] \rangle$$

$f \in \mathcal{S}$, ξ - обобщ. функция на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Для ядерных обобщённых функций это определение оправдывается такими преобразованиями:

Если $\langle \xi, f \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) f(x) dx \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

то $\langle \tilde{\xi}, f \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\xi}(p) f(p) dp = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \xi(x) dx \right) f(p) dp =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} f(p)\,dp \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \tilde{f}(x)\,dx = \langle \xi, F[f] \rangle .$$

$\boxed{\text{Упр.}}$ Докажите $F[\delta(x)] = 1$.