Семинар 9

1. Найти матрицу линейного оператора в заданном базисе, если его собственными значениями являются числа 2, -3, 5, -1, а соответствующие им собственные векторы имеют в этом базисе координаты $\{1,1,1,0\}$, $\{2,2,1,0\}$, $\{1,0,-1,0\}$, $\{0,0,0,1\}$.

2. Если оператор A обратим, то всякое A-инвариантное подпространство является A^{-1}-инвариантным. Доказать.

Что можно сказать о линейном операторе A: $V \to V$, если любой ненулевой вектор $v \in V$ является собственным вектором оператора A?

3. Пусть x – собственный вектор оператора A с собственным значением λ и одновременно собственный вектор оператора B с собственным значением μ. Доказать, что x является собственным вектором

а) оператора $A+B$ с собственным значением $\lambda+\mu$;

б) оператора AB с собственным значением $\lambda\mu$;

в) оператора A^m с собственным значением λ^m;

г) оператора $A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_nE$ с собственным значением $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$.

4. Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами степени ≤ 3.

5. Оператор A обладает собственными векторами x_1, x_2, x_3 с собственными значениями 1, 2, 3 соответственно. Доказать, что никакой ненулевой вектор вида $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ не может быть собственным вектором оператора A.

6. Оператор A в вещественном четырехмерном пространстве обладает инвариантным трехмерным подпространством. Доказать, что A обладает одномерным инвариантным подпространством.