

Семинар 8

1. Линейный оператор A в векторном пространстве \mathbb{R}^3 отправляет векторы $(101), (100), (123)$ в векторы $(111), (110), (321)$ соответственно. Куда при этом отправляется вектор $(-1, 4, 2)$?

2. Лежит ли вектор $(-1, 4, 12)$ в образе оператора A из задачи 1? Если да, то найти его прообраз. Найти ядро оператора A .

В задачах 3 и 4 предполагается, что в пространстве \mathbb{R}^4 выбран стандартный базис (это как?) и что в нем задан оператор, который на произвольном векторе $x \in \mathbb{R}^4$ действует по указанному ниже правилу. В каждом случае нужно доказать линейность оператора, записать его матрицу в стандартном базисе, найти его образ и ядро.

3. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ переходит в $x = (x_4, x_1, x_2, x_3)$.

4. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ переходит в $x = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.

5. В пространстве многочленов от переменной t степени ≤ 5 рассмотрим оператор A : $Ap(t) = t^{\frac{dp}{dt}}$. Доказать его линейность. Записать его матрицу в базисе $1, t, \dots, t^5$. Найти его образ и ядро.

6. В векторном пространстве V фиксирован вектор w , а в двойственном пространстве – линейный функционал l . Зададим в пространстве V оператор A формулой $Av = l(v)w$. Доказать, что так определенный оператор линеен. Найти его ядро и образ. Разобрать все случаи.