

# Материалы к семинарам по матанализу

9-я неделя (6–10.11.2017)

## Краткое содержание лекций

### Лекция 10. Производная (8.11.2017)

1. Три определения производной
2. Дифференцируемость и непрерывность
3. Арифметика производных
4. Производная сложной функции
5. Производная обратной функции
6. Локальная теорема об обратной функции
7. Построение графиков

## Примерные задачи семинара 17 или 18

На одном из этих семинаров должна быть контрольная работа!

### Производные многочленов и рациональных функций.

**Задача 8.1.** Найдите (исходя из определения производной) производные следующих функций, постройте их графики и графики их производных:

$$1/x, x^2, x^n, \sqrt{x}.$$

**Задача 8.2.** Функция  $f$  совпадает с  $ax + b$  при  $x \leq x_0$ , совпадает с  $x^2$  при  $x > x_0$ . При каких  $a$  и  $b$  она дифференцируема?

**Задача 8.3.** Найти производные и построить графики функций и их производных:

а)  $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ ;

б)  $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$ ;

в)  $3x^5 - 25x^3 + 60x - 38$ ;

г)  $x + 1/x^2$ ;

д)  $\frac{x^2+9x-13}{x+4}$ .

**Задача 8.4\*.** Докажите (или опровергните), что если рациональную функцию (отношение двух многочленов) продифференцировать достаточное количество раз, то результат будет стремиться к нулю на бесконечности.

### Производные сложных и обратных функций. Липшицевость.

**Задача 8.5.** Вычислите производные следующих функций:

а)  $(3x^2 - 5x + 1)^5$ ;

б)  $\sqrt{1 - x^2}$ ;

в)  $\frac{(2x+3)^2}{(3x+1)^3}$ ;

г)  $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ ;

д)  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ;

е)  $x^{1/n}$ ;

ж)  $x^{m/n}$ .

**Задача 8.6.** Композиция липшицевых функций - липшицева. Выразите подходящую константу Липшица для  $f \circ g$  через константы Липшица для  $f$  и  $g$ .

**Задача 8.7.** Функция  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности нуля. Обязательно ли она удовлетворяет условию Липшица в какой-нибудь (возможно меньшей) окрестности нуля? Тот же вопрос для дифференцируемой функции.