

# Материалы к семинарам по матанализу

## 10-я неделя (13–17.11.2017)

### Краткое содержание лекций

#### Лекция 11. Элементарные свойства дифференцируемых функций (15.11.2017)

1. Скорость и рост
2. Теорема Ферма
3. Теорема Ролля
4. Теорема Лагранжа о конечном приращении
5. Правило Лопиталья
6. Теорема о нулевой производной

### Примерные задачи семинаров 19 и 20

#### Производные элементарных тригонометрических функций и обратных к ним.

**Задача 9.1.** Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

**Задача 9.2.** Вычислите производные функций:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

**Задача 9.3.** Вычислите производные обратных функций:  $\arccos x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$ . Для каждой функции постройте график ее и ее производной.

**Задача 9.4.** Вычислите производные следующих функций:

- а)  $2x^3 \cos x + \sin x^3$ ;
- б)  $\sin(\sin(\sin(x)))$ ;
- в)  $\sqrt[2017]{x + \sin x}$ ;
- г)  $\operatorname{tg}(1/x) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + 2})$ ;
- д)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{arcctg} x)$ .

#### Графики.

**Задача 9.5.** По эскизу графика функции постройте эскиз графика ее производной.

**Задача 9.6.** Исследовать функции и построить их графики.

- а)  $(x + 1)\sqrt[3]{x}$ ;
- б)  $(2 - x^2)/(1 - x^4)$ ;
- в)  $\frac{x^4}{(1+x)^3}$ ;
- г)  $(x - 2)\sqrt{x + 1}$ ;
- д)  $\frac{|x|^{3/2}}{\sqrt{|x-1|}}$ ;
- е)  $\sqrt{1 + \sin x}$ .

#### Касательная и нормаль.

**Задача 9.7.** Найти уравнение касательной к графику функции  $\frac{x^5 - 3x}{x^2 + 1} + \sin x$  в точке с абсциссой 1.

**Задача 9.8.** Найти уравнения общих касательных к параболам  $2x^2 + 3x + 5$  и  $-x^2 + 5x + 4$ , если такие касательные существуют.

**Задача 9.9.** Для каких точек плоскости и в каком количестве найдутся проходящие через них касательные к графику функции  $f$ , если

- а)  $f(x) = x^2$ ; б)  $x^3$ ; в)  $f(x) = x^n$ ; г)  $f(x) = x^5 - 2x$ ?

**Задача 9.10.** Нормалью к графику функции  $f$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  будем называть прямую, перпендикулярную касательной в этой точке. Найдите уравнение нормали к графику дифференцируемой функции  $f$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

## Разные задачи

**Задача 9.11.\*** (Правило Декарта) Рассмотрим многочлен

$$a_1x^{i_1} + \dots + a_nx^{i_n},$$

в котором степени  $i_1, \dots, i_n$  возрастают, а каждый из коэффициентов ненулевой. Докажите, что число его положительных корней не больше числа перемен знака в последовательности  $a_1, \dots, a_n$ . (Указание: используйте теорему Ролля и деление на подходящий моном.)

**Задача 9.12.\*** У вещественного многочлена степени 100 пять ненулевых членов. Может ли у него быть 100 вещественных корней?

**Задача 9.13.\*** Почему функция  $\operatorname{arctg} x$  не является рациональной функцией?

**Задача 9.14.\*** Докажите, что тригонометрический многочлен (функция вида  $c + \sum_{k=1}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$ ) тождественно равен нулю, если и только если все числа  $c, a_i, b_i$  равны нулю.

**Задача 9.15.\*** Функция  $f$  везде дифференцируема и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ . Есть ли у нее вторая производная в нуле?