Листок 3

Задача 1. Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + 2y + 3z \\ \dot{z} = -x + y + 4z \end{cases}$$

Задача 2. Найти образ вектора $(1, 2, 3)$, приложенного к началу координат, под действием за время $\pi/2$ фазового потока, определяемого векторным полем

$$(x^2 - \sin y + \operatorname{sh}^2 z, \sin x + y^2 - z^2, x^2 + y^2 - 2z(x + y + 1)).$$

Задача 3. Нарисуйте образ квадрата $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ при преобразовании фазового потока системы

(a) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ за время $t = 1$.

Задача 4. Найдите объем образа единичного куба под действием преобразования за время $t = 1$ фазового потока системы

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + 3x_1,\ \dot{x}_2 = \cos x_3 - 2x_2 + x_1,\ \dot{x}_3 = \operatorname{arctg} x_1 - x_2 + x_3.$$

Задача 5. Выпрямите на плоскости следующие векторные поля:

(a) $\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, (b) $(x + y)\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$.

Задача 6. Пусть $b(t, x)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что в расширенном фазовом пространстве для любой точки (t_0, x_0) существует достаточно малая окрестность, в которой обратная замена к замене координат $(t, x) \mapsto (t, X(t, x))$, где $X(t, x)$ – решение задачи Коши для уравнения $\dot{x} = b(t, x)$ с начальным условием $X(0, x) = x$, уравнение $\dot{x} = b(t, x)$ переводит в уравнение $\dot{y} = 0$. Таким образом, локально выпрямляется поле направлений. Выпрямите поле направлений уравнений (a) $\dot{x} = x$, (b) $\dot{x} = t$.

Задача 7. (a) Пусть A и B – матрицы $n \times n$. Докажите, что e^{At} и e^{Bs} для всех t, s коммутируют тогда и только тогда, когда $[A, B] = AB - BA = 0$.

(b) Докажите, что для всяких матриц A и B верно равенство (формула Ли)

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n.$$