1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

8.1 Уравнения Лагранжа и замены координат

Основополагающим принципом в классической механике является то, что в качестве обобщенных координат системы можно выбирать что угодно, скажем лагранжева динамика системы на многообразии M не должна зависеть от такого выбора. Действительно, посмотрим, что происходит с уравнениями движения ЭЛ при замене обобщенных координат $g : M \mapsto M$, $g \in Diff(M)$, т.е.

$$q = q(Q), \qquad \dot{q}^i = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\dot{Q}^j, \quad L(q(Q), \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q}) = \mathcal{L}(Q, \dot{Q}) \tag{1}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}\dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^i} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i \partial Q^k}\dot{Q}^k\end{gathered} \tag{2}$$

поэтому уравнения ЭЛ в новых координатах

$$0=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}^i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}\frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i\partial Q^k}\dot{Q}^k=$$
$$=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}-\frac{\partial^2 q^j}{\partial Q^i\partial Q^k}\dot{Q}^k\right)= \tag{3}$$
$$=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}-\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}=0,\qquad i=1,\ldots,N$$

благополучно выполняются в силу уравнений в старых координатах.

8.2 Симплектоморфизмы фазового пространства

Вернемся теперь к гамильтонову формализму и фазовому пространству, симплетическому $2N$-мерному многообразию $\mathcal{M}$, оснащенному невырожденной замкнутой 2-формой

$$d\omega=0,\qquad \omega^N\neq 0 \tag{4}$$

на котором естественно рассматривать более общие замены координат – симплектоморфизмы, сохраняющие симплектическую форму

$$F:\mathcal{M}\mapsto\mathcal{M},\qquad F^*(\omega)=\omega \tag{5}$$

Рассмотрим теперь “форму Пуанкаре”

$$\alpha:\qquad d\alpha=\omega \tag{6}$$

такую, что в координатах Дарбу она имеет вид [1]

$$\alpha=pdq=\sum_{i=1}^{N}p_i dq^i \tag{7}$$

Теорему Лиувилля о сохранении симплектической формы (или интегрально – фазового объема) можно переформулировать одним из следующих “локальных” способов

[1] Ясно, что вообще говоря она определена с точностью до некоторой точной формы – дифференциала функции $\alpha\sim\alpha+df$.

- Сохраняется сама форма

$$F^*(\omega) = \omega \tag{8}$$

- Сохраняются любые площади

$$\int_\Sigma \omega = \int_{\Sigma_F} \omega \tag{9}$$

для любых "сумм площадей проекций" поверхности.

- По теореме Стокса отсюда следует для контуров $\gamma = \partial\Sigma$

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma_F} \alpha_F \tag{10}$$

Последнее утверждение эквивалентно тому, что при канонических преобразованиях

$$\alpha_F - \alpha = F^*\alpha - \alpha = dS \tag{11}$$

форма Пуанкаре α преобразуется с точностью до дифференциала некоторой *функции* на $\mathcal{M}$, поскольку $d\alpha_F - d\alpha = 0$. Это утверждение является частным случаем важнейшего физического понятия – "калибровочных преобразований"

$$\alpha \mapsto \alpha + dS, \qquad \omega \mapsto \omega \tag{12}$$

для связности $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$ и ее кривизны $\omega = d\alpha$. Таким образом, каноническое преобразование задается производящей функцией $S \in Fun(\mathcal{M})$ на симплектическом многообразии – фазовом пространстве.

Пример: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $\omega = dp \wedge dq$, общее преобразование $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$

$$F: \qquad P = P(p,q), \qquad Q = Q(p,q) \tag{13}$$

желательно обратимое. Тогда

$$\begin{aligned} dP \wedge dQ &= \left(\frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq\right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq\right) = \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) dp \wedge dq = \{Q,P\} dp \wedge dq \end{aligned} \tag{14}$$

т.е. преобразование каноническое, если $\{Q, P\} = 1$. Получили частный случай общего простого следствия: если преобразование сохраняет симплектическую форму ω, то оно сохраняет и скобку Пуассона.

Казалось бы у нас осталось две функции $\{P(p,q), Q(p,q)\}$ с единственным на них условием. Но если взять уже инфинитезимальную форму

$$P(p,q) = p + \pi(p,q) + \dots, \qquad Q(p,q) = q + \vartheta(p,q) + \dots \tag{15}$$

то

$$\begin{aligned}\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \left(1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial q}\right)\left(1 + \frac{\partial \pi}{\partial p}\right) - \frac{\partial \vartheta}{\partial p}\frac{\partial \pi}{\partial q} + \dots = \\ = 1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial q} + \frac{\partial \pi}{\partial p} + \dots\end{aligned} \tag{16}$$

что означает, что уже в первом порядке

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial q} + \frac{\partial \pi}{\partial p} = 0 \tag{17}$$

или дифференциал

$$\vartheta dp - \pi dq = d(\dots) \tag{18}$$

является точным (ср. с формулой Стокса). Другими словами – канонические преобразования определяются одной производящей функцией на фазовом пространстве, это рассуждене легко обобщить на произвольный случай.

8.3 Уравнение Гамильтона-Якоби

Попробуем посмотреть на все это с другой точки зрения. Начнем с того, что:

Лемма: Гамильтоновы потоки на $\mathcal{M}$ сохраняют симплектическую форму ω, т.е. являются примерами канонических преобразования.

Доказательство: воспользуемся координатами Дарбу. Тогда

$$\dot{\omega} = \sum_{i=1}^{N} \left(d\dot{p}_i \wedge dq_i + dp_i \wedge d\dot{q}_i\right) \tag{19}$$

и вследствие канонических уравнений

$$
\begin{aligned}
d\dot{q}_i &= d\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} + \sum_j dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \\
d\dot{p}_i &= -d\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_j dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} - \sum_j dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

получаем

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega} = \sum_{i,j} \left(dp_i \wedge dp_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} + dq_i \wedge dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \right) + \\
+ \sum_{i,j} \left(dp_i \wedge dq_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - dp_j \wedge dq_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Вернемся теперь к динамике гамильтоновой системы, геренируемой гамильтонианом H или векторным полем $\xi_H = \Omega dH$ и посмотрим на соответствующую однопараметрическую подгруппу группы симплектоморфизмов, скажем за время $t \in (0, T)$. Решение соответствующих канонических уравнений можно интерпретировать как каноническое преобразование

$$
\begin{gathered}
F: \qquad P = P(p, q), \qquad Q = Q(p, q) \\
(p, q) = (p_0, q_0) = (p(0), q(0)), \qquad (P, Q) = (p(T), q(T))
\end{gathered}
\tag{22}
$$

и рассмотреть его производящую функцию

$$
dS = PdQ - pdq, \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad p = -\frac{\partial S}{\partial q} \tag{23}
$$

выраженную $S = S(q, Q; T)$ через начальные и конечные координаты, и зависящую от временного интервала T как от параметра. Более того, в дальнейшем часто будет полезно считать, что начальная координата $q = q_0$ фиксирована, и мы рассматриваем “пучок траекторий”, проходящих через эту точку в “конфигурационном пространстве” (что бы это ни значило!), т.е. смотрим на функции $S = S(Q; T)$, зависящие от $q = q_0$ как от параметра.

Теорема: Производящей функцией канонического преобразования (22) является действие системы

$$S(q, Q; T) = \int_0^T dt(p\dot{q} - H) \tag{24}$$

вычисленное на решении канонических уравнений с фиксированными координатами на концах. Как функция $S = S(Q; T)$ времени T и конечной координаты Q это действие удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(\frac{\partial S}{\partial Q}, Q; T\right) = 0 \tag{25}$$

называемым *уравнением Гамильтона-Якоби.*

Пример: Для свободной частицы имеем:

$$\begin{gathered} H = \frac{p^2}{2m}, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = 0 \\ q(t) = q_0 + \frac{p}{m}t = q + \frac{Q - q}{T}t \\ S = m\frac{(Q - q)^2}{2T} \end{gathered} \tag{26}$$

откуда

$$\begin{gathered} P = \frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{\partial S}{\partial q} = m\frac{Q - q}{T} = p \\ \frac{\partial S}{\partial T} = -m\frac{(Q - q)^2}{2T^2} = -\frac{p^2}{2m} = -\frac{P^2}{2m} = -H \end{gathered} \tag{27}$$

и уравнение Гамильтона-Якоби с очевидностью выполняется.

Задача: проверить это утверждение для гармонического осциллятора.