1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Уравнение Гамильтона-Якоби

9.1 Действие и уравнение Гамильтона-Якоби

Вернемся теперь к динамике гамильтоновой системы, геренируемой гамильтонианом H или векторным полем $\xi_H = \Omega dH$ и посмотрим на соответствующую однопараметрическую подгруппу группы симплектоморфизмов, скажем за время $t \in (0, T)$. Решение соответствующих канонических уравнений можно интерпретировать как каноническое преобразование

$$\begin{gathered} F: \qquad P = P(p,q), \qquad Q = Q(p,q) \\ (p,q) = (p_0, q_0) = (p(0), q(0)), \qquad (P,Q) = (p(T), q(T)) \end{gathered} \tag{1}$$

и рассмотреть его производящую функцию

$$dS = PdQ - pdq, \qquad P = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad p = -\frac{\partial S}{\partial q} \tag{2}$$

выраженную $S = S(q, Q; T)$ через начальные и конечные координаты, и зависящую от временного интервала T как от параметра. Более того, в дальнейшем часто будет полезно считать, что начальная координата $q = q_0$ фиксирована, и мы рассматриваем "пучок траекторий", проходящих через эту точку в "конфигурационном пространстве" (что бы это ни значило!), т.е. смотрим на функции $S = S(Q; T)$, зависящие от $q = q_0$ как от параметра.

Теорема: Производящей функцией канонического преобразования (1) является действие системы

$$S(q, Q; T) = \int_0^T dt(p\dot{q} - H) \tag{3}$$

вычисленное *на решении* уравнений движения с фиксированными координатами на концах. Как функция $S = S(Q; T)$ времени T и конечной координаты Q это действие удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial T} + H\left(\frac{\partial S}{\partial Q}, Q; T\right) = 0 \tag{4}$$

называемым *уравнением Гамильтона-Якоби*. Другими словами, функция действия (3) удовлетворяет соотношениям

$$dS = PdQ - pdq, \qquad \frac{\partial S}{\partial T} = -H(P, Q; T) \tag{5}$$

9.2 Доказательство теоремы и принцип наименьшего действия

Доказательство почти очевидно, хотя по дороге встречаются нудные тонкости. Реально оно сводится к очередному использованию принципа наименьшего действия.

- В лагранжевой формулировке

$$\begin{aligned}\delta S = \delta \int_0^T dt L(q, \dot{q}; t) = \int_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \\ + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right|_0^T\end{aligned} \tag{6}$$

обычно мы выкидывали второе слагаемое (полагаясь на граничные условия), и требовали уравнений ЭЛ для зануления интеграла. Можно то же самое переформулировать по-другому: наоборот, *на уравнениях* ЭЛ получаем

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_0^T = P\delta Q - p\delta q \tag{7}$$

что совпадает с формулой для дифференциала производящей функции при использовании очевидных определений $P_i = p_i(T) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_T$ и $p_i = p_i(0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big|_0$.

Также для лагранжева дейсвия очевидно, что $\frac{dS}{dT} = L(q, \dot{q}; T)$. Применим это теперь к функции $S = S(Q;T)$

$$\frac{dS}{dT} = \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial Q}\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial S}{\partial T} + P\dot{Q} \tag{8}$$

где мы воспользовались (2), (7). Другими словами

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{dq}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q} = L \tag{9}$$

или, воспользовавшись преобразованием Лежандра,

$$\frac{\partial S(q;t)}{\partial t} = L - p\dot{q} = -H(p,q;t) \tag{10}$$

т.е. выполняется уравнение Гамильтона-Якоби.

- Из принципа наименьшего действия в гамильтоновой формулировке

$$\delta S = \int_0^T dt \left(\delta p \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \delta q \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \right) + p\delta q\big|_0^T \tag{11}$$

следует, что на решениях канонических уравнений Гамильтона (т.е. на траектории)

$$\begin{aligned} P = p(T) = \frac{\partial S}{\partial Q}, \qquad Q = q(T) \\ p = p(0) = -\frac{\partial S}{\partial q}, \qquad q = q(0) \end{aligned} \tag{12}$$

а кроме того, из формулы (3) очевидно, что

$$\frac{\partial S}{\partial T} = -H(P,Q;T) \tag{13}$$

Поэтому на пространстве $(Q;T)$ для дифференциала функции $S = S(q,Q;T)$ (при фиксированном q!) можно написать

$$dS = PdQ - HdT \tag{14}$$

Этот дифференциал определяет функцию

$$S(Q;T) = \int_{(q;0)}^{(Q;T)} dS = \int_{(q;0)}^{(Q;T)} (pdq - Hdt) \tag{15}$$

т.к. он является точным в силу уравнений Гамильтона $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$.

9.3 Канонические преобразования и гамильтониан

Пусть теперь (p,q) и (P,Q) опять два разных абстрактных выбора координат Дарбу на $\mathcal{M}$, связанных каноническим преобразованием. Поставим вопрос о том, как выглядят в новых переменных канонические уравнения: т.е. какова для них функция Гамильтона $\mathbb{H}(P,Q;t)$. Поскольку и в тех и в других переменных канонические уравнения следуют из принципа наименьшего действия, т.е.

$$\delta S = \delta \int (pdq - Hdt) = 0 \tag{16}$$

и

$$\delta \mathbb{S} = \delta \int (PdQ - \mathbb{H}dt) = 0 \tag{17}$$

то действия в тех и других переменных должны совпадать с точностью до полных производных, т.е.

$$PdQ - \mathbb{H}dt = pdq - Hdt - dF \tag{18}$$

(для дальнейшего удобства взяли dF с минусом), и это равенство имеет смысл канонического преобразования на расширенном (временем) фазовом пространстве с производящей функцией $F = F(Q,q;t)$, такой что

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \mathbb{H} = \frac{\partial F}{\partial t} + H \tag{19}$$

Понятно, что добавляя к (18) полный дифференциал, можно (преобразованием Лежандра!) задать производящую функцию $\Phi = \Phi(P, q; t) = F - PQ$ для канонического преобразования

$$\begin{gathered} QdP - \mathbb{H}dt = pdq - Hdt - d\Phi \\ Q = -\frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \mathbb{H} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \end{gathered} \tag{20}$$

9.4 Решение уравнения Гамильтона-Якоби и канонические преобразования

На уравнение Гамильтона-Якоби (точнее - на его решения) возможен и другой взгляд с точки зрения канонических преобразований. Посмотрим на уравнение (4) забыв, что $S = S(Q, T)$ как-то связано с начальными координатами, т.е. написав

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q; t\right) = 0 \tag{21}$$

где $S = S(q; t)$ есть функция времени и N координат, и рассматривая (21) просто как уравнение первого порядка в частных производных. Как решение задачи Коши уравнение (21) зависело бы от выбора произвольной (начальной) функции $S|_{t=0} = S_0(q_1, \ldots, q_N)$, однако для целей интегрирования канонических уравнений достаточно найти решения (21), зависящее от $N + 1$ произвольных постоянных (т.н. полный интеграл).

Теорема Якоби: Если найден полный интеграл (21), т.е. решение

$$S = f(t; q_1, \ldots, q_N; \alpha_1, \ldots, \alpha_N) + C \tag{22}$$

зависящее от $N+1$ произвольных $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N; C\}$, то канонические уравнения Гамильтона решаются в квадратурах.

Доказательство опять же вытекает из того, что теперь уже формула (22) имеет смысл канонического преобразования (18) (или (20)), если рассматривать параметры $\{\alpha\}$ как набор новых координат (или импульсов). При этом в силу (21)

$$\mathbb{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{23}$$

т.е. новые переменные $\{\alpha\}$ (и им сопряженные $\{\beta\}$!) удовлятворяют каноническим уравнениям с *нулевым* гамильтонианом

$$\dot{\alpha}_i = 0, \qquad \dot{\beta}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

а значит решение (22) приводит к системе

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{25}$$

из N *алгебраических* уравнений, из которых можно в принципе найти

$$q_i = q_i(t; \alpha, \beta), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{26}$$

т.е. интересующие нас координаты системы как функции времени и $2N$ постоянных (связанных, например) с граничными условиями.

Чтобы понять, что решение уравнение Гамильтона-Якоби имеет достаточно непривычный на первый взгляд вид, рассмотрим:

Пример: Свободная частица

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0 \tag{27}$$

Будем искать решение в виде разделяющихся переменных (более или менее единственный существующий метод), т.е.

$$\begin{gathered} S = A(t) + B(q) + C \\ A'(t) + \frac{1}{2m} B'(q)^2 = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

т.е.

$$A(t) = -\alpha t, \qquad B(q) = \sqrt{2m\alpha}\; q \tag{29}$$

или

$$\begin{gathered} S = -\alpha t + \sqrt{2m\alpha}\; q + C \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\; q = \beta \end{gathered} \tag{30}$$

Отсюда получаем

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}(t + \beta) \tag{31}$$

где две появившиеся константы имеют очевидный смысл

$$\alpha = \frac{m v_0^2}{2} = E, \quad \beta = q_0 \sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{q_0}{v_0} \tag{32}$$