# Лекция 10. Производная

Мы переходим к новой части нашего курса - дифференциальному исчислению. Она возникла на сто лет раньше первой части. Для решения физических задач Ньютону и Лейбницу не нужны были ни теория множеств, ни строгое определение вещественных чисел, ни топология прямой. В отличие от создателей анализа, мы теперь знаем, на каком фундаменте стоит построенное ими здание. Надеюсь, что эта часть курса покажется вам легче предыдущей.

## 1 Предел функции и символ о малое.

**Определение 1** *Число $b$ назывется пределом функции $f$ в точке $a$ , если для каждой последовательности точек $a_n \neq a$ из области определения функции, сходящейся к $a$, предел последовательности $(f(a_n)$ существует и равен $b$.*

**Упражнение 1** *Докажите, что функция непрерывна в точке $a$ если и только если ее предел в этой точке равен $f(a)$.*

**Определение 2** *Функция $f$ является о малым от $x^n$ при $x \to 0$ (пишется: $f = o(x^n)$ при $x \to 0$ ), если $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Иногда указание на стремление $x$ к нулю опускается.*

**Пример 1** $x = o(1), x^2 = o(x), x \sin^2 x = o(x^2)$ *при* $x \to 0$.

## 2 Три определения производной.

Производная - это скорость. Всем нам знакомо ощущение скорости. Скорость показывает стрелка спидометра. Осталось только определить формально это хорошо знакомое всем понятие. Во всех определениях этого раздела функции заданы на интервале.

**Определение 3** *классическое. Производная функции $f$ в точке $x$ - это предел*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{1}$$

*если этот предел существует.*

**Определение 4** *главная часть приращения. Производная функции $f$ в точке $x$ - это главная линейная часть приращения функции в этой точке:*

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h). \tag{2}$$

В этом определении производной названо произведение $f'(x)h$. В многомерном анализе производной называется именно аналог этого произведения, так называемое линейное отображение касательных пространств. Одномерные линейные отображения $x \to \alpha x$ отождествляются с числом $a$; отображение $x \mapsto f'(x)h$ отождествляются с числом $f'(x)$.

**Определение 5** *угловой коэффициент касательной. Производная функции $f$ в точке $x$ - это тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке.*

Здесь касательная - это предел секущих, проведенных через точки $(x, f(x)$ и $(x + h, f(x+h))$ при $h \to 0$.

**Теорема 1** *Приведенные выше три определения производной эквивалентны.*

**Доказательство** Мы докажем импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Чтобы доказать (2), положим:

$$R(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h.$$

Разделим на $h$ и перейдем к пределу. Имсеем:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

по (1). Следовательно,

$$\frac{R(h)}{h} \to 0, \ R = o(h),$$

что и требовалось. □

Докажем вторую импликацию. Проведем секущую к графику функции $f$ через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0).$$

По второму определнию производной,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + R(h),$$

$R(h) = o(h)$. Следовательно, угловой коэффициент секущей равен

$$f'(x_0) + \frac{R(h)}{h} = f'(x_0) + o(h).$$

Его предел при $h \to 0$ равен $f'(x_0)$. Это и есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $f$ в точке $x_0$.

Третья импликация следует из проделанных выше выкладок: тангенс угла наклона касательной к графику фунекции $f$ в точке $x_0$ равен

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

следовательно, равен $f'(x)$ в смысле определния 1.

## 3 Дифференцируемость и непрерывность.

**Определение 6** *Функция называется непрерывно дифференцируемой в точке (или на интервале), если ее производная в этой точке существует и непрерывна в ней (или существует и непрерывна на этом интервале).*

**Теорема 2** *Функция, дифференцируемая в этой точке, непрерывна в этой точке.*

**Доказательство** Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$. Воспользуемся вторым определением непрерывности. Возьмем произвольную последовательность $x_n \to x$. Положим: $h_n = x_n - x_0$.

$$f(x_n) - f(x_0) = f(x_0 + h_n) - f(x_0) = f'(x_0)h_n + \frac{R(h_n)}{h_n}.$$

Поскольку $\frac{R(h_n)}{h_n} \to 0$, эта последовательность ограничена: $\exists C : |\frac{R(h_n)}{h_n}| < C$. Тогда

$$|f(x_0 + h_n) - f(x_0)| \leq |f'(x_0) + C||h_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

□

## 4 Арифметика прозводных.

Функция $f(x) \equiv x$ дифференцируема на всей прямой, и ее производная тождественно равна 1. Нижеследующие теоремы позволяют вывести отсюда, что любая рациональная функция (частное от деления двух многочленов) непрерывно дифференцируема вне полюсов (нулей знаменателя). Это дает нам огромный запас дифференцируемых функций.

**Теорема 3** *Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы на интервале. Тогда*

*a*

$$(f + g)' = f' + g' \tag{3}$$

*b (формула Лейбница)*

$$(fg)' = fg' + f'g \tag{4}$$

*c (производная частного)*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{5}$$

**Упражнение 2** *Проверьте эти формулы при $g \equiv 1$.*

**Доказательство** Формула (3) следует из теоремы о сумме пределов. Докажем 4. При фиксированном $x$,

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f(x) + f'(x)h + o(h))(g(x) + g'(x)h + o(h)) =$$

$$f(x)g(x) + h(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)) + R(h),$$

где

$$R(h) = o(h)g(x+h) + o(h)f(x+h) + o(h)o(h).$$

Следовательно,

$$\frac{R(h)}{h} = \frac{o(h)}{h}g(x+h) + \frac{o(h)}{h}f(x+h) + \frac{o(h)}{h}o(h).$$

Но $\frac{o(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$, а функции $g(x+h)$, $f(x+h)$ и $o(h)$, рассматриваемые как функции от $h$ при фиксированном $x$ ограничены. Следовательно, $\frac{R(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$, т.е. $R(h) = o(h)$.

Окончательно,

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h + o(h).$$

Отсюда следует (4). Аналогичная выкладка работает для частного, и мы не рассматриваем подробно остаточный член

$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} = \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))h + o(h)}{g(x+h)g(x)}.$$

Следовательно,

$$\lim \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} + \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(xg'(x))}{g^2(x)}.$$

Это доказывает (1). $\square$