31.10.2017 Классическая теория поля =1=

Лекция №8

На прошлой лекции мы попытались найти решение уравнения Клейна-Гордона в виде линейной комбинации плоских волн

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \alpha(p)$$

$$\Downarrow$$

$$(p^2 - m^2)\alpha(p) = 0 \quad p^2 \equiv p^\mu p_\mu.$$

$\alpha(p)$ – скалярная функция четырёх-вектора p^μ, вещественность $\varphi(x)$ влечёт

$\bar{\alpha}(p) = \alpha(-p)$.

Если искать решения уравнение на $\alpha(p)$ в классе обычных функций, то любое возможное решение даст нулевой пакет $\varphi(x) \equiv 0$.

Если допустить решения в виде обобщенных функций, то можно получить Пуанкаре-инвариантный волновой пакет.

Итак, имеем уравнение = 2 =

$$(p^2-m^2)\alpha(p) = \left((p^0)^2-\vec{p}^{\,2}-m^2\right)\alpha(p)=0$$

Его решением в классе обобщённых функций служит выражение

$$\alpha(p) = \delta\left((p^0)^2-\vec{p}^{\,2}-m^2\right)a(p)$$

где $a(p)$ – скаляр и $\overline{a}(p) = a(-p)$.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Более простой аналогичный случай в $\mathbb{R}^1$: $x f(x) = 0$ имеет решение $f = \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0)\delta(x)$, поскольку $x\delta(x) \equiv 0$ как функционал на регулярных в нуле функциях.

Введём обозначение:

$$\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2} \qquad \vec{p}^{\,2} = (p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2$$

Это чётная функция 3-х мерного импульса: $\omega(-\vec{p}) = \omega(\vec{p})$.

Воспользуемся свойством δ-функции

$$\delta(g(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|g'(x_k)|}, \text{ где } g(x_k)=0,\ g'(x_k)\neq 0 \Rightarrow$$

x_k – простые нули $g(x)$.

Согласно этому свойству:

$$\delta((p^0)^2-\vec{p}^2-m^2)\equiv\delta((p^0)^2-\omega^2(\vec{p}))=$$

$$=\frac{\delta(p^0-\omega)}{|2p^0|\big|_{p^0=\omega}}+\frac{\delta(p^0+\omega)}{|2p^0|\big|_{p^0=-\omega}}=$$

$$=\frac{1}{2\omega(\vec{p})}\left(\delta(p^0+\omega)+\delta(p^0-\omega)\right).$$

Подставим теперь $\alpha(p)=\delta(p^2-m^2)a(p)$ в интеграл для $\varphi(x)$ и учтем приведенное выше тождество для δ-ф-ции.

$$\varphi(x)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\delta((p^0)^2-\omega^2)a(p)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp^0}{2\omega(\vec{p})}e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\vec{x}}\left(\delta(p^0-\omega)+\delta(p^0+\omega)\right)a(p)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-i\omega x^0+i\vec{p}\vec{x}}}{2\omega(\vec{p})}a(p^0,\vec{p})\Big|_{p^0=\omega(\vec{p})}+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^4}\frac{e^{i\omega x^0+i\vec{p}\vec{x}}}{2\omega(\vec{p})}a(p^0,\vec{p})\Big|_{p^0=-\omega(\vec{p})}$$

Во втором интеграле делаем замену переменной интегрирования

$\vec{p} \to -\vec{p}$. Пользуясь чётностью $=4=$ $\omega(\vec{p})$ получаем такой результат:

$$\varphi(x) = \int\limits_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4\, 2\omega(\vec{p})}\, e^{-i\omega x^0 + i\vec{p}\vec{x}}\, a(\omega, \vec{p}) +$$

$$+ \int\limits_{R^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4\, 2\omega(\vec{p})}\, e^{i\omega x^0 - i\vec{p}\vec{x}}\, a(-\omega, -\vec{p}).$$

Обозначим $a^-(\vec{p}) = a(\omega, \vec{p})$

$$a^+(\vec{p}) = a(-\omega, -\vec{p}).$$

В силу свойств скаляра $a(p)$: $\overline{a}(p) = a(-p)$ получаем правило комплексного сопряжения функций $a^\pm(\vec{p})$:

$$\overline{a^\pm(\vec{p})} = a^\mp(\vec{p}).$$

Таким образом, вещественное поле $\varphi(x)$ представлено в виде суммы взаимно-сопряжённых положительно и отрицательно частотных компонент $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$$

$$\varphi^{\pm}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^4\, 2\omega(\vec{p})}\, e^{\pm i p\cdot x}\Big|_{p^0=\omega} a^{\pm}(\vec{p}) \qquad (\star)$$

$$\overline{\varphi^{\pm}(x)} = \varphi^{\mp}(x)$$

$$(\Box + m^2)\varphi^+(x) = (\Box + m^2)\varphi^-(x) = 0.$$

Смысл компонент $\varphi^{\pm}(x)$ в полной мере проявляется после квантования поля $\varphi(x)$. В квантовом случае $a^+(\vec{p})$ заменяется на операторы рождения частиц с импульсом $\vec{p}$ и массой m (в ~~...~~ свободной теории), а функции $a^-(\vec{p})$ превращаются в операторы уничтожения таких частиц.

Итак, мы представили общее решение уравнения Клейна-Гордона в виде релятивистски инвариантного пакета плоских волн на массовой поверхности. Подчеркнем, что инвариантность относительно преобразований из группы Пуанкаре — главное достоинство формулы (☆).

Первая теорема Нётер для полевых систем.

Сформулируем теперь теорему Нётер для полевой системы, которая связывает инвариантность системы относительно преобразований из некоторой группы и существование сохраняющихся величин (интегралов движения) при эволюции системы.

Для придания большей общности будем считать, что нам задан Лагранжиан смеси различных полей, которые мы обозначим $\varphi^A(x)$, $A = 1, \dots, N$. $\varphi^A(x)$ могут быть скалярными, векторными или тензорными полями любой природы. Будем считать, что $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ зависит только от полей и их первых производных.

Сформулируем вспомогательное утверждение, которое легко доказать аналогично конечномерному случаю.

[У] Если 2 лагранжиана $\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\partial\varphi)$ приводят к тождественно равным уравнениям движения, то есть:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A}\equiv\partial_\mu\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\varphi^A)}\right)-\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\varphi^A}$$

то эти лагранжианы отличаются не более чем на 4-дивергенцию векторно-значной функции полей:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\partial\varphi)=\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)+\frac{\partial R^\mu(\varphi)}{\partial x^\mu}.$$

[О] Назовем некоторое преобразование ~~и~~ координат x^μ пространства Минковского и полевых функций $\varphi^A(x)$ преобразованием симметрии полевой системы с лагранжианом $\mathcal{L}(\varphi,\partial\varphi)$, если это преобразование оставляет инвариантными уравнения движения (ур-я Эйлера-Лагр.) =8= системы.

$\boxed{\text{Т}}$ Пусть имеется К-параметрическая группа Ли G <u>преобразований симметрии полевой системы</u>:

$g(\xi) \in G$, $\{\xi_s\}_{1 \le s \le K}$ – независимые параметры группы (координаты на групповом многообразии), $g(0) = e$ – единичный элемент группы:

$$\begin{cases} g(\xi) \triangleright x^\mu = x'^\mu = X^\mu(x|\xi) = x^\mu + \sum\limits_{s=1}^{K} \xi_s \mathcal{X}_s^\mu(x) + O(\xi^2) \\ g(\xi) \triangleright \varphi^A = \varphi'^A, \text{ причём} \\ \varphi'^A(x') = F^A(\varphi, x|\xi) = \varphi^A(x) + \sum\limits_{s=1}^{K} \xi_s f_s^A(\varphi, x) + O(\xi^2) \end{cases} \quad (\star\star)$$

Здесь $g \triangleright x$, $g \triangleright \varphi^A$ обозначают <u>действие группового элемента</u> – т.е. выполнение соответствующего преобразования из группы, а функции

$$\mathcal{X}_s^\mu(x) = \frac{\partial X^\mu(x|\xi)}{\partial \xi_s}\bigg|_{\xi=0} \quad (\star\star)$$

$$f_s^A(\varphi, x) = \frac{\partial F^A(\varphi, x|\xi)}{\partial \xi_s}\bigg|_{\xi=0}$$

называются генераторами действия группы (они отвечают малым — инфинитезимальным преобразованиям симметрии).

Если (☆☆) — преобразование симметрии, то $\exists$ K величин (по числу независимых параметров группы) — 4-векторных токов $\mathcal{J}^\mu_s(\psi, \partial\psi)$ для которых выполнено ~~ра~~ тождество

$$\int \partial_\mu \mathcal{J}^\mu_s \, d^4x = 0, \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

Ω

если ψ^A — решение уравнений движения. Токи $\mathcal{J}^\mu_s$ имеют следующий явный вид:

$$\mathcal{J}^\mu_s = \sum_{A=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A(x))} \left[f^A_s(\psi, x) - X^\nu_k(x) \partial_\nu \psi^A(x) \right] + X^\mu_k(x) \mathcal{L} + \mathcal{S}^\mu_k(\psi).$$

Здесь f^A_s и X^ν_k — генераторы группы, определённые в (☆☆), а функции $\mathcal{S}^\mu_k(\psi)$ связаны с возможным изменением лагранжиана при действии =10= группы симметрий G:

$$\mathcal{L}'(\psi'(x'), \partial'\psi') = \mathcal{L}(\psi', \partial'\psi') + \partial'_\mu \Sigma^\mu(\psi'|\xi).$$

Поскольку при $\xi = 0$ (тождественное преобразование группы) $\Sigma^\mu\big|_{\xi=0} \equiv 0$, то Σ^μ можно представить в виде

$$\Sigma^\mu(\psi'|\xi) = \sum_{s=1}^{K} S^\mu_s(\psi)\xi_s + O(\xi^2).$$

$$S^\mu_k = \frac{\partial \Sigma^\mu}{\partial \xi_k}\Big|_{\xi=0}$$

Доказательство:

Рассмотрим действие полевой системы

$$S[\psi] = \int_\Omega \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)\, d^4x,$$

где $\Omega \subset M_4$ – некоторая область, на границе которой фиксируются ~~вариации~~ значения полей при вариации действия.

Выполним замену переменных $x \mapsto x'$ $\psi \to \psi'$:

$$\int\limits_{\Omega} d^4x\, \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) = \int\limits_{\Omega'} d^4x'\, \mathcal{L}'(\psi', \partial'\psi')$$

$$d^4x' = \det \left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| d^4x$$

$$\mathcal{L}'(\psi', \partial'\psi') = \mathcal{L}(\psi', \partial'\psi') + \partial_\mu \Sigma^\mu(\psi'|\xi) -$$

– поскольку преобразование симметричное.

Рассмотрим разложение правой части в ряд по групповым параметрам ξ_s с точностью до второго порядка:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(x^\mu + \xi_s X_s^\mu(x) + O(\xi^2) \right) =$$

не будем писать знак $\sum\limits_{s=1}^{K}$

$$= \delta^\mu_\nu + \xi_s \partial_\nu X_s^\mu + O(\xi^2)$$

В матричном виде:

$$\left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| = \begin{pmatrix} 1+\xi_s\partial_0 X_s^0 & \xi_s \partial_0 X_s^1 & \cdots & \cdots \\ \xi_s \partial_1 X_s^0 & 1+\xi_s\partial_1 X_s^1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1+\xi_s\partial_2 X_s^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1+\xi_s\partial_3 X_s^3 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что в $\det\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|$

первый порядок по ξ_s появится только из произведения диагональных членов: $(1+\xi_s\partial_0 X_s^0)\dots(1+\xi_s\partial_3 X_s^3)$,

то есть $\det\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\| = 1+\xi_s\partial_\mu X_s^\mu + O(\xi^2)$.

Для дифференцирования по переменным x' имеем аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\delta_\mu^\nu - \xi_s\partial_\mu X_s^\nu(x) + O(\xi^2)\right)\partial_\nu =$$

$$= \partial_\mu - \xi_s(\partial_\mu X_s^\nu)\partial_\nu + O(\xi^2).$$

Поэтому:

$$\frac{\partial \varphi'^A(x')}{\partial x'^\mu} = \left(\partial_\mu - \xi_s(\partial_\mu X_s^\nu)\partial_\nu + O(\xi^2)\right)\left(\varphi^A(x) + \xi_r f_r^A(\varphi, x) + O(\xi^2)\right)$$

$$= \partial_\mu\varphi^A(x) + \xi_s\left(\partial_\mu f_s^A - (\partial_\mu X_s^\nu)\partial_\nu\varphi^A(x)\right) + O(\xi^2).$$

$$S[\psi] = \int_{\Omega'} d^4x' \, \mathcal{L}'(\psi', \partial'\psi') =$$

$$= \int_{\Omega} d^4x \, \det\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\| \left(\mathcal{L}(\psi', \partial'\psi') + \partial'_\mu \Sigma^\mu\right) =$$

$$= \int_{\Omega} d^4x \, \mathcal{L}(\psi, \partial\psi).$$

Вычитаем правую часть из левой и удерживаем только первый порядок по ξ_s:

$$0 = \int_{\Omega} d^4x \Big[\mathcal{L}\Big(\overbrace{\psi + \xi_s f_s}^{\psi'}, \overbrace{\partial\psi + \xi_s(\partial f_s - (\partial\chi_s)\partial\psi)}^{\partial'\psi'}\Big) + \partial_\mu\left(\xi_s S^\mu_s(\psi)\right) \Big] \underbrace{\left(1 + \xi_s \partial_\mu \chi^\mu_s\right)}_{\text{из } \det\left\|\frac{\partial x'}{\partial x}\right\|} -$$

$$- \int_{\Omega} d^4x \, \mathcal{L} =$$

$$= \int_{\Omega} d^4x \Big[\underbrace{\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A(x)} \xi_s f^A_s}_{(1)} + \sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} \xi_s \Big(\partial_\mu f^A_s - (\partial_\mu \chi^\nu_s)\partial_\nu \psi^A\Big) +$$

$$+ \xi_s \partial_\mu S^\mu(\psi) + \underbrace{\mathcal{L}\, \partial_\mu \chi^\mu_s \xi_K}_{(2)} \Big] + O(\xi^2).$$

$(*)$

Будем теперь считать, что в этом тождестве поля $\psi^A(x)$ не произвольны, а являются решениями уравнений движения, то есть:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} \right).$$

Преобразуем некоторые слагаемые в $(*)$ (подчёркнуты с номерами (1) и (2)):

$$\underbrace{\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \xi_s f_s^A}_{(1)} = \sum_A \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} \right) \xi_s f_s^A$$

$$\underbrace{\mathcal{L} \partial_\mu X_s^\mu \xi_s}_{(2)} \equiv \partial_\mu \left(\xi_s \mathcal{L} X_s^\mu(x) \right) - \xi_s X_s^\mu \partial_\mu \mathcal{L} =$$

$$= \partial_\mu \left(\xi_s X_s^\mu \mathcal{L} \right) - \xi_s X_s^\mu \Big(\underbrace{\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A}}_{\text{заменим из уравнений Эйлера - Лагранжа}} \partial_\mu \psi^A + \sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi^A)} \partial_\mu \partial_\nu \psi^A \Big) =$$

$$= \partial_\mu \left(\xi_s X_s^\mu \mathcal{L} \right) - \xi_s X_s^\mu \Bigg[\sum_{A=1}^N \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi^A)} \right) \partial_\mu \psi^A + $$
$$+ \sum_{A=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi^A)} \partial_\nu \partial_\mu \psi^A \Bigg].$$

Объединяя эти выражение с другими слагаемыми в (*), получаем такой результат:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega} d^4x \Bigg[& \sum_{A=1}^{N} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} \xi_s f_s^{\rho A}(\varphi, x) \right) - \\
& - \sum_{A=1}^{N} \Bigg(\xi_s X_s^\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \right) \partial_\mu \varphi^A + \\
& + \xi_s X_s^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \partial_\nu \partial_\mu \varphi^A + \partial_\nu \left(\xi_s X_s^\mu \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi^A)} \partial_\mu \varphi^A \Bigg) + \\
& + \xi_s \partial_\mu S_s^\mu(\varphi) + \partial_\mu \left(\xi_s \mathcal{L} X_s^\mu \right) \Bigg] =
\end{aligned}
$$

$$
= \int_{\Omega} d^4x \, \partial_\mu \Bigg[\sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} f_s^{A} + \mathcal{L} X_s^\mu - \sum_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^A)} X_s^\nu \partial_\nu \varphi^A + S_s^\mu \Bigg] \xi_s = \underline{\int_{\Omega} d^4x \, \partial_\mu J_s^\mu \xi_s +} + O(\xi^2)
$$

В силу произвольности ξ_k разные порядки по ξ независимы $\Rightarrow$

$$
\int_{\Omega} d^4x \, \partial_\mu J_s^\mu = 0
$$

на решениях уравнений движения. ■

Пользуясь произвольностью области Ω, можно получить более сильное (локальное) утверждение теоремы Нётер:

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu_s(\psi, \partial\psi) = 0$$

Чтобы увидеть сохраняющиеся величины, проинтегрируем это равенство по области $V \subset \mathbb{R}^3$:

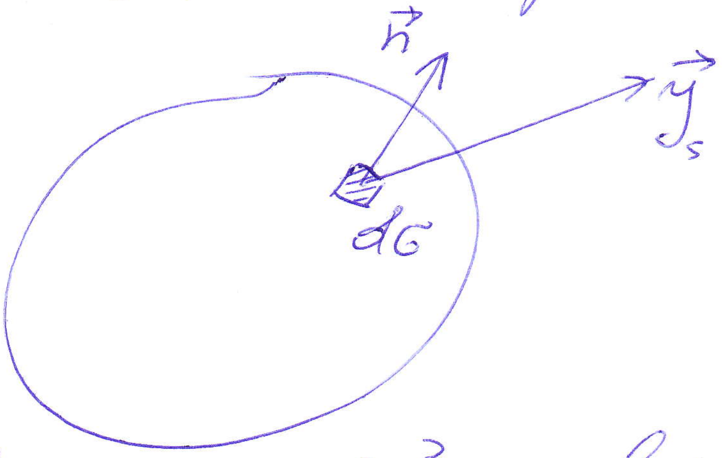
$$\int_V d^3x\, \partial_0 \mathcal{J}^0_s + \int_V d^3x \sum_{i=1}^{3} \partial_i \mathcal{J}^i_s = 0$$

$$\frac{\partial}{c\,\partial t} \int_V d^3x\, \mathcal{J}^0_s = - \oint_{\partial V} \mathcal{J}^i_s\, n^i\, d\sigma .$$

В правой части мы применили теорему Гаусса и перешли от интегрирования по объему области V от трёхмерной дивергенции $\partial_i \mathcal{J}^i_s$ к поверхностному интегралу по границе ∂V области V.

Вектор $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ — это вектор внешней нормали к поверхности ∂V, $|\vec{n}| = 1$ в $\forall$ точке поверхности ∂V.

Интеграл $\oint_{\partial V} (\vec{J}_s \cdot \vec{n})\, d\sigma$ называется потоком векторного поля $\vec{J}_s$ через ∂V.



Если $V \to \mathbb{R}^3$, а вектор $\vec{J}_s(\psi, \partial\psi)$ спадает на ∞ $|\vec{x}| \to \infty$ быстрее, чем $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$, то $\lim\limits_{V \to \mathbb{R}^3} \oint_{\partial V} (\vec{J}_s \vec{n})\, d\sigma = 0$ и мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} J_s^0\, d^3x = 0.$$

Это и означает, что к функций времени

$$Q_s(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, J_s^0(\psi, \partial\psi) \qquad s = 1, 2, \dots, k$$

на самом деле не зависят от времени на решениях уравнений движения.

J_s^0 называется плотностью сохраняющейся величины, а $\{cJ_s^i\}$ – компонентами плотности потока этой величины в направлениях Ox^1, Ox^2, Ox^3.

Соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_s^{(V)}(t) \equiv \int_V d^3x\, J_s^0 = -c \oint_{\partial V} \vec{J}_s \vec{n}\, d\sigma$$

показывает, что в объеме V сохраняющаяся величина может флуктуировать ($Q_s^{(V)} = \mathrm{Const}$ только во всем пространстве: $V \to R^3$), но ее изменение в объеме V происходит только при наличии ненулевого потока этой величины через поверхность ∂V.

Пример: скалярное поле и группа Пуанкаре.

Построим соответствующие интегралы и токи для группы Пуанкаре.

(а). Трансляции:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu = X^\mu(x|a)$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) = F(\varphi|a)$$

В данном случае имеем 4 параметра a^μ (индекс s является индексом координат пространства Минковского).

Генераторы в данном случае очень простые:

$$X^{\mu}_{\nu}(x) = \frac{\partial X^{\mu}(x|a)}{\partial a^{\nu}}\Big|_{a=0} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

$$f_{\nu}(x) = \frac{\partial F(\varphi|a)}{\partial a^{\nu}}\Big|_{a=0} = 0$$

Нётеровские токи по традиции обозначают $T^{\mu}{}_{\nu}$:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}\partial_{\nu}\varphi - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L}$$

Такой знак выбирают для удобства интерпретации. Здесь мы учли, что $f_{\nu}=0$ и $S^{\mu}{}_{\nu}=0$, так как $\mathcal{L}$ не меняется при трансляциях:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V_{вз}(\varphi).$$

Удобно индекс ν тоже поднять наверх, то есть, перейти к

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha}T^{\mu}{}_{\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}\partial^{\nu}\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

Учитывая вид $\mathcal{L}$, получаем:

$$T^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varphi\partial^{\nu}\varphi - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\varphi\partial^{\alpha}\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V_{вз}\right)$$

Это тензор энергии-импульса

скалярного поля. Из явного его вида заключаем, что $T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$.
Убедимся непосредственно, что на решениях уравнения движения

$$(\Box+m^2)\varphi(x)=-\frac{dV_{вз}}{d(\varphi(x))}$$

выполнено $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$.

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=\Box\varphi\,\partial^\nu\varphi+\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\partial^\nu\varphi-$$
$$-\frac{1}{2}\left((\partial_\mu\partial_\alpha\varphi)\partial^\alpha\varphi+\partial_\alpha\varphi\,\partial_\mu\partial^\alpha\varphi\right)g^{\mu\nu}+$$
$$+m^2\varphi\,\partial^\nu\varphi+\frac{dV_{вз}}{d\varphi}\partial^\nu\varphi=$$
$$=\Box\varphi\,\partial^\nu\varphi+\cancel{\partial^\alpha\varphi\,\partial_\alpha\partial^\nu\varphi}-\cancel{\frac{1}{2}\left(\partial^\alpha\varphi\,\partial^\nu\partial_\alpha\varphi+\partial_\alpha\varphi\,\partial^\nu\partial^\alpha\varphi\right)}+$$
$$+m^2\varphi\,\partial^\nu\varphi+\frac{dV_{вз}}{d\varphi}\partial^\nu\varphi=$$
$$=\left((\Box+m^2)\varphi+\frac{dV_{вз}}{d\varphi}\right)\partial^\nu\varphi=0.$$

$T^{\mu0}$ – отвечают инвариантности при временных сдвигах $x^0\to x^0+a^0$.
Поэтому T^{00} – плотность энергии скалярного поля:

$$T^{00}=\frac{1}{2}\partial^0\varphi\,\partial^0\varphi+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\varphi\,\vec{\nabla}\varphi+\frac{m^2}{2}\varphi^2+V_{вз}$$

Соответственно, <u>энергия поля</u> дается интегралом от плотности:

$$P^0 = \int d^3x\, T^{00}.$$

T^{i0} — плотность потока энергии поля. В нашем примере:

$$T^{i0} = \partial^i \varphi\, \partial^0 \varphi.$$

$T^{\mu i}$ отвечают инвариантности при <u>пространственных</u> <u>трансляциях</u>:

$$x^i \to x^i + a^i,$$

поэтому T^{0i} - плотность импульса поля в направлении Ox^i, а

$$P^i = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, T^{0i} \text{ — импульс поля.}$$

Заметим, что в силу <u>симметрии</u> $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, $T^{0i} = T^{i0}$, то есть, плотность импульса в i-м направлении совпадает с плотностью потока энергии в этом же направлении: энергия поля переносится в направлении его импульса.

Ну и наконец T^{ij} – плотность
потока i-й компоненты импульса
поля P^i в j-м направлении.

(б) Лоренцевы вращения:

$$x^\mu \to x'^\mu = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu x^\nu =$$

$$= X^\mu(x|\omega)$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) = F(x|\omega).$$

В данном случае роль параметров ξ_s играют 6 независимых компонент $\omega_{\alpha\beta}$, $\alpha < \beta$.

Генераторы: $\chi^{\mu,\alpha\beta}(x) = \left.\frac{\partial X^\mu}{\partial \omega_{\alpha\beta}}\right|_{\omega=0} =$

$$= (\Omega^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$f^{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial F}{\partial \omega_{\alpha\beta}}\right|_{\omega=0} = 0.$$

Соответствующие токи обозначаются

$$M^{\mu,\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)\left.\frac{\partial X^\nu}{\partial\omega_{\alpha\beta}}\right|_{\omega=0} =$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)}_{T^\mu{}_\nu}(\Omega^{\alpha\beta})^\nu{}_\sigma x^\sigma =$$

$$= -T^\mu{}_\nu(\Omega^{\alpha\beta})^\nu{}_\sigma x^\sigma.$$

Вспоминая вид лоренцевских генераторов $(\Omega^{\alpha\beta})^{\nu}{}_{\sigma} = -g^{\alpha\nu}\delta^{\beta}_{\sigma} + g^{\beta\nu}\delta^{\alpha}_{\sigma}$,

получаем:

$$M^{\mu,\alpha\beta} = T^{\mu\alpha}x^{\beta} - T^{\mu\beta}x^{\alpha}.$$

Проверим $\partial_{\mu} M^{\mu,\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta$:

$$\partial_{\mu} M^{\mu,\alpha\beta} = (\partial_{\mu} T^{\mu\alpha}) x^{\beta} + T^{\mu\alpha}\delta^{\beta}_{\mu} - (\partial_{\mu} T^{\mu\beta}) x^{\alpha} - T^{\mu\beta}\delta^{\alpha}_{\mu} = (\partial_{\mu} T^{\mu\alpha} = 0) = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0$$

Видно, что симметрия тензора $T^{\mu\nu}$ — важное свойство, позволяющее записать $M^{\mu,\alpha\beta}$ в простом виде через $T^{\mu\nu}$. Если бы $T^{\mu\nu}$ не был симметричным, то $M^{\mu,\alpha\beta}$ не выражалось бы в виде $T^{\mu\alpha}x^{\beta} - T^{\mu\beta}x^{\alpha}$.

$M^{0,\alpha\beta}$ — плотности сохраняющихся величин.

$M^{0,ij}$ — происходят от инвариантности при вращениях $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ связаны с вектором момента импульса поля:

$$M^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, M^{0,ij}$$

– вектор момента импульса поля.
($\vec{M}$ – сохраняется во времени).