

**Контрольная работа по алгебре на 2 часа 30 минут от 27.10.17**

**Задача I. Вопросы по теории групп.**

- 1) Пусть  $H$  — подгруппа  $G$ . Доказать, что для любого  $a \in G$  множество  $a^{-1}Ha$  является подгруппой группы  $G$ .
- 2) Пусть порядок элемента  $abc$  равен 4. Доказать, что элемент  $bca$  также имеет порядок 4.
- 3) Пусть  $H_p$  и  $H_q$  — подгруппы группы  $G$  порядков  $p$  и  $q$  соответственно, где  $p, q$  — различные простые числа. Доказать, что  $H_p \cap H_q = \{e\}$ , где  $e$  — нейтральный элемент группы  $G$ .
- 4) Пусть  $G$  — группа порядка 77. Доказать, что  $G$  содержит элементы порядка 7 и порядка 11.
- 5) Пусть  $G$  — группа порядка 625. Доказать, что  $G$  содержит элемент порядка 5.

**Задача II. Матрицы.**

- 1) Найти порядок элемента  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  в группе  $GL_4(\mathbb{F}_2)$ .
- 2) Пусть  $S \in GL_4(\mathbb{F}_2)$ . Может ли элемент  $S$  иметь порядок 11?
- 3) Доказать, что множество матриц

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2 \right\}$$

является подгруппой группы  $GL_4(\mathbb{F}_2)$ .

- 4) Имеется ли в подгруппе  $U$  элемент порядка 8?

**Задача III. Линейная алгебра и группы.**

- 1) Сравните определения подгруппы и подпространства и найдите общее число подгрупп группы  $(\mathbb{F}_2^6, +)$ .
- 2) Сравните определения гомоморфизма и линейного отображения и найдите число гомоморфизмов группы  $(\mathbb{F}_2^6, +)$  в группу  $(\mathbb{F}_2^4, +)$ .
- 3) Пусть  $V_2$  подпространство размерности 2 пространства  $\mathbb{F}_2^6$ . Доказать, что факторгруппа (или фактор-пространство)  $\mathbb{F}_2^6/V_2$  изоморфна группе  $(\mathbb{F}_2^4, +)$ .
- 4) Найти число 4-мерных подпространств в  $\mathbb{F}_2^6$ , содержащих фиксированную плоскость  $V_2$  из  $\mathbb{F}_2^6$ , используя 3).
- 5) Найти число 4-мерных подпространств  $U_4, V_4$  пространства  $\mathbb{F}_2^6$  таких, что  $U_4 + V_4 = \mathbb{F}_2^6$ .
- 6\*) Найти число сюръективных гомоморфизмов  $\mathbb{F}_2^6$  в  $\mathbb{F}_2^4$ .