КУРС АЛГЕБРЫ, Листок 3, срок сдачи до ? ноября.

Задача 1. **Подгруппы прямого произведения.** Найти число подгрупп следующих групп

$$(C_p \times C_p) \times C_p, \quad C_{p^2} \times C_{p^2}.$$

Задача 2. **Группа бесконечного диэдра D_∞.** Рассмотрим бесконечный "правильный многогранник", вершинами которого являются все целые числа вещественной прямой. D_∞ — это группа движений аффинной плоскости, переводящих этот бесконечный "многогранник" в себя.

1) Описать все элементы этой группы.

2) Найти матричную реализацию группы как подгруппу группы целочисленных матриц второго порядка.

3) Доказать, что $D_\infty = T \cdot S$ является полупрямым произведением своих подгрупп $T \cong (\mathbb{Z}, +)$ и $S \cong (\{\pm 1\}, \cdot) \cong C_2$.

Задача 3. **Классы сопряженности.**

1) Найти все классы сопряженности в группе S_4.

2) Найти все нормальные подгруппы в S_4.

3) Найти все подгруппы группы A_5.

Задача 4. **Формула Бернсайда.** Найти общее число различных ожерелий, составленных из 12 бусин, каждая из которых может быть окрашена в белый или черный цвет, используя указанную формулу.

Задача 5. **Группы порядка pq.** Пусть порядок конечной группы G делится на простое число p. В доказательстве теоремы Коши о существовании в G элемента простого порядка p мы показали, что число решений уравнения $a^p = e$ в группе G делится на p. (См. лекцию от 9 ноября.)

1) Доказать, что число n_p подгрупп порядка p в группе G сравнимо с 1 по модулю p, то есть $n_p - 1$ делится на p.

Пусть p и q – два простых числа, $p < q$.

2) Доказать, что коммутативная группа порядка pq является циклической.

3) Доказать, что некоммутативная группа G порядка pq содержит единственную нормальную подгруппу H_q порядка q.

4) Доказать, что некоммутативная группа G есть полупрямое произведение единственной нормальной подгруппы H_q и любой другой подгруппы $H_p < G$ порядка p.

5) Если $q - 1$ не делится на p, то любая группа G порядка pq является циклической. Доказать! *В частности, группы порядка 15, 33, 35 изоморфны циклическим.*