Программа курса АЛГЕБРЫ на 2017/2018 учебный год

Валерий Гриценко и Евгений Смирнов

Первый семестр.

I. *Введение в линейную алгебру.*

1. Подпространства в бинарном векторном пространстве $\mathbb{F}_2^n$. Существование базиса и метод его построения. Конечная проективная плоскость Фано. Операции с подпространствами. Число различных базисов и число различных подпространтв в $\mathbb{F}_2^n$.

2. Задание гиперплоскости одним уравнением и существование двойственного базиса. Задание подпространства уравнениями. Ранг матрицы. Двойственность между подпространствами размерности и коразмерности k.

3. Метод Гаусса для векторов, порождающих подпорстранство, и для систем линейных уравнений. Алгоритм нахождения линейных уравнений, задающих линейную оболочку нескольких векторов. Построение двойственного базиса.

4. Линейные отображения и матрицы. Композиция отображений и умножение матриц. Нахождения ядра и образа линейных отображений. Общая линейная группа.

II. *Теория групп.*

1. Общие свойства бинарных операций: ассоциативность, нейтральный элемент, обратный элемент, степени. Определение группы, изоморфизм групп. Подгруппы, порядок элемента, циклически группы. Смежные классы и теорема Лагранжа. Примеры: группа перестановок и общая линейная группа.

2. Нормальная подгруппа и фактор-группа. Пример: фактор-пространство бинарного векторного пространства и вопросы подсчета подпространств с различными свойствами. Ядро и образ гомоморфизма. Три теоремы о гомоморфизмах и их обобщения. Прямое и полупрямое произведения групп.

3. Действие группы на множестве, орбиты и стабилизаторы. Классы сопряженных элементов.

4. Группа перестановок.

III. *Теория колец и полей.*

1. Кольца и поля. Примеры колец и полей. Область целостности и кольцо частных. Кольца многочленов и формальных степенных рядов.

2. Кольцо многочленов над $\mathbb{F}_2$ как пример евклидова кольца, алгоритм деления с остатком. Алгоритм Евклида и наибольший общий делитель многочленов, неприводимые многочлены, разложение на неприводимые, классы вычетов и поля из 2^n элементов.

3. Евклидово кольцо — кольцо главных идеалов. Примеры евклидовых колец. Кольца вычетов и техника вычислений в кольце вычетов. Конечные поля и поле комплексных чисел. Теорема Эйлера, китайская теорема об остатках. Лемма Гаусса, кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально. Редукция многочленов по простому модулю и техника разложения на множители в кольце многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

4. Идеалы, простые и максимальные идеалы, факторизация. Ядро и образ гомоморфизма, строение гомоморфизма коммутативных колец.

Второй семестр

I. *Пространство с линейным оператором.*

1. Собственные векторы, собственные подпространства и собственные значения линейного оператора. Характеристический и минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли.

2. Диагонализуемость, препятствия к ней. Строение нильпотентного оператора. Циклический оператор, разложение нильпотентного оператора в прямую сумму циклических.

3. Корневые подпространства, их независимость, разложение в прямую сумму.

4. Теорема о жордановой нормальной форме (для алгебраически замкнутого поля). Теорема о фробениусовой нормальной форме.

II. *Модули над евклидовыми кольцами.*

1. Модуль, подмодуль, фактормодуль. Гоморфизм модулей, ядро, образ, теорема о гомоморфизме.

2. Первый базовый пример: абелева группа как Z-модуль

3. Второй базовый пример: пространство с оператором как K[X]-модуль.
4. Свободный модуль. Ранг модуля.

5. Модули над евклидовыми кольцами. Теорема о подмодуле свободного модуля.

6. Конечно порожденный модуль. Теорема о взаимных базисах. Классификация конечно порожденных модулей над евклидовыми кольцами.
7. Следствия: классификация решеток, конечных абелевых групп, теоремы о ЖНФ и ФНФ.

III. *Пространство с билинейной формой.*

1. Билинейные формы. Геометрия пространства с билинейной формой: ортогонал подпространства, соотношения между подпространствами и их ортогоналами. Невырожденные формы.

2. Симметрические формы, квадратичные формы, поляризация. Приведение формы к сумме квадратов методом Лагранжа.

3. Кососимметрические формы, канонический вид кососимметрической формы. Невырожденные кососимметрические формы.

4. Положительно определенные симметрические билинейные формы. Евклидово пространство. Квадратичная форма на евклидовом пространстве, теорема Якоби, критерий Сильвестра. Теорема о приведении пары форм.

5. Оператор на евклидовом пространстве. Ортогональные, симметрические и кососимметрические операторы. Полярное разложение.

6. Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы, положительно определенные эрмитовы формы, унитарное (эрмитово) пространство.

7. Оператор на эрмитовом пространстве. Унитарные, эрмитовы и косоэрмитовы операторы. Диагонализуемость. Нормальные операторы.

IV. *Тензоры.*

1. Тензорное произведение векторных пространств. Тензорная алгебра.

2. Билинейные формы и линейные операторы как тензоры. Hom(V,W) как тензорное произведение V* и W. Свертка и след.

3. Симметрическая и внешняя степень пространства. Реализация как подпространство и факторпространство тензорной степени. Симметрическая и внешняя алгебра.

4. Тензорное произведение, симметрическая и внешняя степени оператора.