КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 4. Теорема Лагранжа и факторгруппы

Задача 1. Пусть G – группа. *Порядок элемента $a \in G$ – это наименьшее натуральное d такое, что $a^d = e$ или ∞, если такого числа d не существует.* Доказать, что

1) $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}(a^{-1}) = \operatorname{ord}(bab^{-1}), \quad \forall\, a,\ b \in G$;

2) если элемент ab имеет конечный порядок, то $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba)$.

3) Пусть $\varphi : G \to G'$ – изоморфизм групп. Доказать, что для любого $a \in G$ имеем $\operatorname{ord}_G a = \operatorname{ord}_{G'} \phi(a)$.

4) Пусть $\varphi : G \to G'$ – морфизм групп и $a \in G$ – элемент конечного порядка в G. Что вы можете сказать о порядке элемента $\varphi(a)$ в произвольной группе G'? В конечной группе G'?

5) Пусть $\varphi : G \to G'$ – гомоморфизм конечных групп. Что вы можете сказать о порядках подгрупп $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$?

Задача 2. Пусть a, b – элементы группы G такие, что $\operatorname{ord} a = m$, $\operatorname{ord} b = n$ и $ab = ba$. Показать, что

1) порядок ab делит наименьшее общее кратное чисел n и m;

2) порядок ab равен nm, если n и m взаимно простые.

3) Пусть G – коммутативная группа. Показать, что множество элементов конечного порядка G_f является подгруппой в G.

4) Показать, что факторгруппа G/G_f не содержит элементов конечного порядка отличных от нейтрального.

5) Рассмотрим аддитивные группы $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ целых и рациональных чисел. Доказать, что любой элемент фактор-группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеет конечный порядок.

Задача 3. 1) Доказать, что любая подгруппа индекса 2 в G является нормальной подгруппой в G.

2) Пусть H – нормальная подгруппа в G индекса m, т.е. $|G/H| = m$. Показать, что $\forall\, a \in G : a^m \in H$.

3) Пусть $H \lhd G$, $[G : H] = m$, $\operatorname{ord}_G a$ взаимно прост с m. Доказать, что $a \in H$.

Задача 4. **Циклические группы.**

Пусть $C_n =< a >= \{e,\, a,\, \ldots\, , a^{n-1}\}$ – циклическая группа порядка n.

1) Любая подгруппа C_n – циклическая (см. Лекции).

2) Пусть d – делитель n. Положим

$$\phi_d(b) = b^d, \quad \forall\ b \in C_n.$$

Показать, что ϕ_d – гомоморфизм группы C_n в себя.

3) Найти его ядро и применить первую теорему о гомоморфизмах.

4) Доказать, что любая факторгруппа циклической группы есть циклическая группа.

Задача 5. **Центр группы**. Центром группы G называется множество

$$Z_G = \{z \in G \,|\, \forall\, a \in G : az = za\,\}.$$

Доказать, что

1) Z_G – коммутативная нормальная подгруппа группы G;

2) Равенство $Z_G = G$ эквивалентно тому, что G – абелева группа;

3) $\varphi(Z_G) < Z_H$ для любого сюръективного гомоморфизма $\varphi : G \to H$;

4) факторгруппа G/Z_G не может быть циклической для неабелевой группы G.

Задача 6. Пусть $\varphi : G \to G'$ – морфизм групп, K – подгруппа в G, H_1 – нормальная подгруппа группы G'. Доказать, что

1) $\varphi^{-1}(H_1)$ – нормальная подгруппа в G;

2) $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K \cdot \operatorname{Ker}\varphi$.

Задача 7. 1) Пусть $H \lhd G$. Предположим, что индекс $[G : H] = n$ и порядок m подгруппы H – взаимно простые числа. Показать, что H – единственная подгруппа порядка m в G.

2*) Пусть $K, H < G$ — подгруппы, причём K нормальна. Предположим, что порядок факторгруппы G/K и порядок подгруппы $H < G$ взаимно просты. Доказать, что H есть подгруппа K.

Задача 8*. Пусть A и B произвольные (не обязательно нормальные) подгруппы конечного индекса в G. Доказать, что индекс (число левых смежных классов) подгруппы $A \cap B$ конечен и

$$[G : A \cap B] \leq [G : A] \cdot [G : B].$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G = A \cdot B$.

Задача 9*. (Листок 2.) Пусть $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ и $\varphi : G \to G'$ – гомоморфизм такой, что $\varphi(H) \subset H'$.

1) Доказать, что отображение $\bar{\varphi}(aH) = \varphi(a)H'$ определено корректно (т.е. зависит только от класса aH в фактор-группе G/H) и задает гомоморфизм факторгрупп $\bar{\varphi} : G/H \to G'/H'$.

2) Найти $\operatorname{Ker}\bar{\varphi}$, $\operatorname{Im}\bar{\varphi}$ и факторгруппу $(G/H)/(\operatorname{Ker}\bar{\varphi})$.