КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 6. Действие группы на множестве и перестановки.

Задача 1. **Орбиты и стабилизаторы.**

1) Пусть группа G действует на множестве X. Рассмотрим стабилизатор произвольного элемента $x \in X$ и его орбиту

$$St_G(x) = G_x = \{a \in G : a{*}x = x\} < G, \quad \mathcal{O}_x = G{*}x = \{a{*}x \,|\, a \in G\} \subset X.$$

Доказать, что стабилизатор G_y любого элемента $y \in \mathcal{O}_x$ сопряжен стабилизатору G_x.

2) Пусть G – конечная группа, а X – конечное множество. Рассмотрим множество неподвижных точек этого действия

$$X_G = \{x \in X \,|\, \forall\, g \in G \quad g * x = x\}.$$

а) Пусть $|G| = 15$, $|X| = 17$ и $X_G = \emptyset$. Найти общее число G-орбит и число элементов каждой орбиты.

б) Пусть $|G| = 33$ и $|X| = 19$. Доказать, что $X_G \neq \emptyset$.

3) Пусть G – p-группа, то есть $|G| = p^n$, где p – простое. Доказать, что

$$|X| \equiv |X_G| \mod p \quad (\text{т.е. } |X| - |X_G| \text{ делится на } p).$$

Задача 2. **Классы сопряженности.** Любая группа G действует на множестве своих элементов посредством сопряжения:

$$\forall\, a \in G\ \forall\, x \in G\ : a * x = axa^{-1} \qquad (\text{см лекции}).$$

Орбитой элемента $x \in G$ является класс сопряженности

$$Cl(x) = Cl_G(x) = \{\, gxg^{-1} \,|\, g \in G\,\}.$$

1) Для каких $x \in G$ класс $Cl(x)$ содержит только один элемент?

2) Возможно ли, чтобы $Cl(x) = G$?

3) Возможно ли, чтобы группа G содержала только два класса сопряженных элементов?

4) Найти все группы, содержащие ровно три класса сопряженных элементов.

Задача 3. Пусть G – p-группа порядка p^4.

1) Чему может равняться порядок центра группы G?

2) Предположим, что порядок центра G равен p^2. Найти число классов сопряженности группы G.

Задача 4*. Пусть G – группа порядка $n > 1$, и p – наименьший простой делитель порядка группы n. Предположим, что G содержит подгруппу H индекса p. Доказать, что H – нормальная подгруппа группы G.

Задача 5. **Перестановки как произведения независимых циклов.**

1) Выразить перестановки в виде произведения независимых циклов

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 4 & 3 & 9 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma = (12)(123)(12)$$

и найти π^{2017}.

2) Найти π^{-1} и σ^{-1}.

3) Определить порядок и сигнатуру π и σ. Найти число элементов в классе сопряженности $Cl_{S_9}(\pi)$.

4) Вычислить τ^{2000} и найти $|Cl_{S_{12}}(\tau^{2000})|$, где

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. **Порядки элементов группы S_n.**

1) Определить порядки всех элементов группы S_5 и ее подгруппы A_5.

2) Определить максимальный порядок элементов группы S_7.

3) Сколько элементов порядка 6 имеется в группах S_5 и A_5?

4) Доказать, что любая нечетная перестановка имеет четный порядок.

Задача 7. **Образующие группы S_n.** Пусть $n \geq 3$. В лекциях было доказано, что группа перестановок порождается транспозициями $\{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Доказать, что

1) $S_n = \langle (12), (13), \dots (1n) \rangle$;

2) $S_n = \langle (12), (23 \dots n) \rangle$.

Задача 8. **Циклы и их централизаторы.**

1) Пусть p – простое число. Определить число подгрупп порядка p в группе S_p.

2) Пусть $\sigma = (123 \dots n) \in S_n$ – цикл длины n. Найти централизатор цикла σ в группе S_n.