КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 5. Прямое и полупрямое произведения групп

Задача 1. **Прямое произведение.** Доказать, что

1) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \times \{\pm 1\}$;

2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$;

3) $C_8 \ncong C_4 \times C_2$, $C_{12} \cong C_3 \times C_4$, $C_{12} \ncong C_6 \times C_2$.

4) Верно ли, что группа G изоморфна прямому произведению $(G/K) \times (G/H)$, если $K \lhd G$, $H \lhd G$, $K \cap H = \{e\}$?

5) Можно ли представить группу Гейзенберга $H(\mathbb{F}_2)$ порядка 8 как прямое произведение двух своих подгрупп?

6) Представить группу Гейзенберга $H(\mathbb{F}_2)$ как полупрямое произведение двух своих подгрупп, то есть найти разложение $H(\mathbb{F}_2) = N \cdot K$, где $N \lhd H(\mathbb{F}_2)$, $K < H(\mathbb{F}_2)$ и $N \cap K = \{e\}$.

Задача 2. **Подгруппы прямого произведения.**

1) Найти все подгруппы группы $C_p \times C_p$, где C_p – циклическая группа простого порядка p.

2) Найти все подгруппы группы $C_4 \times C_4$.

3) Пусть $N < A \times B$ и $N \cap A = N \cap B = \{e\}$. Верно ли, что существует подгруппа $H < A \times B$ такая, что $N = (A \cap H) \times (B \cap H)$?

4*) Найти все подгруппы прямых произведений $C_{p^2} \times C_{p^2}$ и $C_{p^m} \times C_{p^n}$.

Задача 3. **Группа диэдра.**

В лекциях было доказано, что группа диэдра D_n ($n \geq 3$) есть полупрямое произведение подгруппы вращений $R_n = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ правильного n-угольника и подгруппы $S = \{e, s\}$, порожденной соответствующей осевой симметрией, где $srs = r^{-1}$. Используя эти образующие, получаем следующее представление группы диэдра

$$D_n = R_n \cdot S = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1};\ r^n = s^2 = e, srs = r^{-1}\}.$$

1) Выписать таблицу умножения в группе, т.е. найти $r^k s r^l$ и $s r^k s r^l$ для любых k, l.

2) Найти центр $Z_n = Z_{D_n}$ группы D_n.

3) Найти факторгруппу D_n / Z_n.

4) Являются ли группы D_4 и D_6 прямыми произведениями некоторых своих подгрупп?

5) Доказать, что $D_3 \cong S_3$ (см. лекции), а D_4 изоморфна группе Гейзенберга $H(\mathbb{F}_2)$.

6*) Найти число подгрупп группы D_n.

Задача 4. **Группа кватернионов Q_8.** Пусть i — мнимая единица, то есть $i^2 = -1$.

1) Показать, что следующие матрицы образуют конечную мультипликативную группу порядка 8

$$\pm\mathbf{1} = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \ \pm I = \pm\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right), \ \pm J = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ \pm K = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

2) Проверить соотношения

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}, \ IJ = -JI = K, \ JK = -KJ = I, \ KI = -IK = J.$$

3) Найти все подгруппы группы Q_8.

4) Доказать, что Q_8 нельзя представить в виде полупрямого произведения двух своих подгрупп.

5) Доказать, что $Q_8 \ncong D_4$.