07.11.2017 | Классическая теория поля | =1=

Лекция №9

На этом занятии мы рассмотрим концепцию передачи взаимодействия между частицами посредством поля.

Когда мы рассматривали построение релятивистской механики мы, фактически, ограничились кинематикой свободных частиц и теорией столкновений (распадов), в которых сохраняется энергия и импульс. Процессы столкновений и распадов частиц характерны тем, что взаимодействие происходит в одной точке пространства-времени (то есть, в одном месте пространства $\mathbb{R}^3$ и в один момент времени t) — мировые линии частиц пересекаются в этой точке. В любой другой ~~точке~~ момент времени частицы, участвующие во взаимодействии — свободны.

=2=

С какой проблемой мы столкнёмся, если попытаемся "релятивизировать", например, взаимодействие Земли и Солнца? Основная трудность будет в невозможности обеспечить <u>конечную скорость</u> передачи взаимодействия.

Рассмотрим Лагранжиан 2х точечных частиц классической механики, взаимодействующих с потенциальной силой, которой отвечает потенциальная энергия $U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$:

$$L=\frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_1-\vec{r}_2).$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа на законы движения $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ каждой частицы имеют вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1=-\dfrac{\partial U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_1}=\vec{F}(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2=-\dfrac{\partial U(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_2}=-\vec{F}(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)). \end{cases}$$

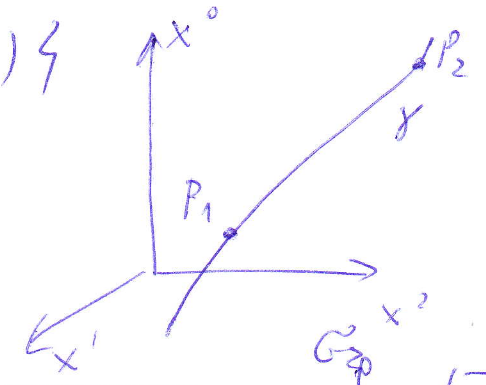
Проблема в том, что ускорение $\ddot{\vec{r}}_1$, например, в некоторый момент t определяется положением второй частицы $\vec{r}_2(t)$ в тот же самый момент t. — т.к. правая часть $\vec{F}(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))$ зависит от $\vec{r}_2(t)$. То есть, независимо от того, насколько удалены частицы (сколь велико расстояние $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ между ними), каждая из частиц мгновенно "чувствует" движение второй частицы и изменяет в соответствии с этим свое ускорение $\ddot{\vec{r}}$. Такая ситуация находится в явном противоречии с требованием конечности скоростей распростране-ния любых сигналов в матери-альном мире.

Единственный случай, когда эту трудность можно преодолеть — взаимо-действие с "внешним полем". Это такая схема взаимодействия, когда потенциальная энергия частицы зависит только от её координат и, следовательно, соответствующая сила определяется местоположением частицы и больше ничем. То есть потенциальная энергия $U(\vec{r})$ – заданная функция и не меняется при движении частицы. (так называемое внешнее поле).

Примирить динамику взаимодействующих на расстоянии частиц и релятивистскую инвариантность в полной мере возможно лишь при введении понятия поля как материального объекта, имеющего свою собственную динамику (законы эволюции) и взаимодействующего с частицами локально. Локальность означает, что движение частиц определяется полем в точке их нахождения. И, в свою очередь, само поле тоже меняется в в точке, где находится частица в зависимости от её движения. Эти изменение поля затем распространяются во всём пространстве в соответствии с полевой динамикой и за конечное время достигают положения других частиц. Только после этого другие частицы получают информацию о движении первой частицы и реагируют на него, взаимодействуя с изменившимся полем и т. д.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда поле внешнее — то есть заданная функция координат пространства Минковского и разберёмся с вопросом как устроить его взаимодействие с точечной частицей. Для этого необходимо модифицировать действие свободной частицы и включить в него слагаемые с полем, так, чтобы уравнения

движение частицы переста- =6=
ли быть свободными.
Действие свободной частицы — функционал от её мировой линии
$\gamma = \{x^\mu(\sigma)\}$



$$S[\gamma] = -mc\int\limits_{\gamma}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -mc\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\, d\sigma$$

Здесь $x^\mu(\sigma)$ — параметризация γ,
$\dot{x}^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\sigma}$.

Требование <u>локальности</u> взаимодействия с полем означает, что добавка в действие частицы, описывающая это взаимодействие, тоже должна быть в виде интеграла по γ от Пуанкаре-инвариантной одн-формы, зависящей от поля.

Например, взаимодействие со скалярным полем можно выбрать так

$$S_{int}[\gamma] = \int\limits_{\gamma}\varphi(x)\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\varphi(x(\sigma))\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\, d\sigma.$$

Рассмотрим другие поля.

[10] Вещественное 4-векторное поле $A^\mu(x)$ на пространстве Минковского — это 4-х компонентная функция ($\mu = 0,1,2,3$), <u>которая под действием преобразований из группы Пуанкаре</u> ведет себя следующим образом.

$$\pi = (\Lambda, a): \quad \pi \triangleright x \longmapsto x' = \Lambda x + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \triangleright A^\mu \longmapsto A'^\mu: \boxed{A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)},$$

то есть $\boxed{A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right)}$.

С помощью векторного поля легко написать простейшую 1-форму, которая является Пуанкаре-инвариантом: $A^\mu(x)\,dx_\mu$.

Действительно, при действии преобразований из группы Пуанкаре:

$$A^\mu(x)dx_\mu \longmapsto A'^\mu(x')dx'_\mu =$$

$$= \underline{\Lambda^\mu{}_\alpha} A^\alpha(x)\,dx_\beta \underline{(\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu} =$$

$$= \delta^\beta{}_\alpha A^\alpha(x)\,dx_\beta = A^\alpha(x)\,dx_\alpha \;-$$

— инвариантное выражение.

Таким образом, взаимодействие частицы с внешним векторным полем можно представить в виде:

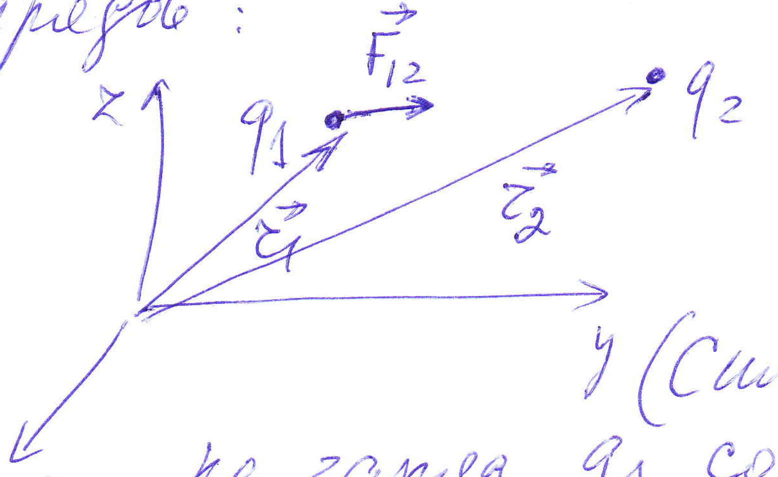
$$S[\gamma] = -mc\int\limits_{\gamma}\sqrt{dx^{\mu}dx_{\mu}} - \frac{e}{c}\int\limits_{\gamma}A^{\mu}(x)dx_{\mu}.$$

Здесь константа e (заряд) определяет интенсивность взаимодействия.

Оказывается, что этот простейший выбор взаимодействия полностью может описать поведение частиц во внешних полях, наблюдаемое в физических экспериментах.

Краткий обзор простейших сведений об электромагнитных взаимодействиях.

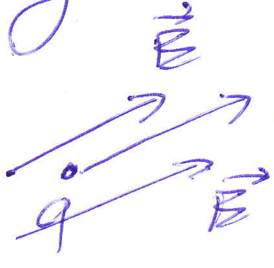
Существование электромагнитных взаимодействий было открыто еще в древности (электризация тел). Само слово "электрон" на греческом языке означает "янтарь". Долгое время (вплоть до 19-го века) исследовались частные проявления электромагнетизма, а именно, электростатические силы. Их математическая формулировка содержится в законе Кулона, описывающем взаимодействие 2х точечных зарядов:



$$\vec F_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}(\vec r_1 - \vec r_2)$$

Направление $\vec F_{12}$ (Сила, действующая на заряд q_1 со стороны q_2) зависит от знака произведения $q_1 q_2$. (Заряды одного знака отталкиваются, заряды разных знаков — притягиваются).

В 19м веке пришли к понятию электрического поля, которое стали характеризовать вектором <u>напряжённости</u> $\vec E$. Значение напряжённости определяет величину и направление электростатической силы, действующей на заряд в данной точке пространства:



$$\vec F = q \cdot \vec E.$$

С изобретением первых источников тока (гальванических элементов) начались опыты с движущимися зарядами (токами) и было обнаружено новое взаимодействие токов друг с другом и токов с природными магнитами, которое стали описывать с помощью понятия магнитного поля и его напряжённости $\vec{H}$.

Магнитные взаимодействия считались отдельным видом сил, не связанных с электростатическими. Магнитное поле $\vec{H}$ оказывало воздействие только на движущиеся заряды и величина и направление магнитной силы зависели от векторного произведения скорости частицы $\vec{v}$ и напряжённости $\vec{H}$. Полная электромагнитная сила при одновременном присутствии $\vec{E}$ и $\vec{H}$ записывалась в виде:

$$\vec{F}_{\Lambda} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$$

и называлась силой Лоренца.

То есть, уравнение второго закона Ньютона для заряженной частицы в электрическом ($\vec{E}$) и магнитном ($\vec{H}$) полях имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{H}].$$

Дж. Максвелл создал теорию единого электро-магнитного поля, в которой $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – 2 его векторные характеристики. Уравнения Максвелла описывают взаимодействие электро-магнитного поля в терминах векторных функций $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{H}(\vec{r},t)$ с токами и зарядами и прекрасно согласуются с экспериментом.

Наша задача получить эти уравнения из действия для полей и частиц и найти связь наблюдаемых характеристик поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ с 4-векторным полем $A^\mu(x)$.

Выберем в качестве параметра на мировой линии частицы лабораторное время $t = \frac{x^0}{c}$.

С такой параметризацией ~~t~~ 12 = действие частицы во внешнем поле A^μ примет вид:

$$S[x^\mu] = -mc^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\,dt - \frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2}A^\mu(x)\frac{dx_\mu}{dt}\,dt$$

~~Здесь~~ $A^\mu\frac{dx_\mu}{dt} = cA^0 - \sum_{i=1}^{3}A^i\dot{x}^i = cA^0 - \vec{A}\dot{\vec{x}}.$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Напомним наши соглашения:

Обозначение со ~~векторами~~ стрелкой всегда подразумевает верхние пространственные индексы у векторов: $\vec{A}\vec{B} \equiv \sum_{i=1}^{3}A^iB^i$, и дифференцирование по компонентам с верхними индексами у дифференциальных операторов:

$$\mathrm{grad}\,\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\end{pmatrix} \equiv \{\partial_i\varphi\}.$$

$$\mathrm{div}\,A \equiv (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \equiv \partial_i A^i \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} \quad \text{и т. д.}$$

Лагранжиан системы

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \Rightarrow$$

(A)

$$\Rightarrow \boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - eA^0(\vec{x},t) + \frac{e}{c}(\vec{A}\dot{\vec{x}}).}$$

Обобщённый импульс, отвечающий координатам $\vec{x}$:

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A^i(x,t) = $$
$$= p^i + \frac{e}{c}A^i$$

Энергия системы:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{3}\dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = (\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla})L - L =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + eA^0.$$

Мы видим, что к энергии-импульсу <u>свободной</u> частицы

$$p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}_{free}}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}, \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}\right)$$

добавляется 4-вектор $\frac{e}{c}A^\mu$:

$$P^\mu = p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P}\right).$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Поскольку L во внешнем поле явно зависит от $\vec{x}$ и t, то 3-вектор импульса $\vec{P}$ и энергия $\mathcal{E}$ не являются сохраняющимися величинами (энергия и импульс системы меняются при изменении $A^\mu(\vec{x},t)$). Это происходит потому, что $L(A)$ — не полный, так как A^μ — не динамическая переменная (согласно т. Нётер сохранение токов выполняется на решениях уравнений движения, а на A^μ у нас нет пока уравнения движения).

Рассмотрим теперь уравнения движения, которые следуют из $L(A)$ и покажем, что они приводят к силе Лоренца при правильной связи A^μ с $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Итак: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Обозначив $\vec{P} = \dfrac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}$ — релятивистский 3-импульс частицы, Получаем следующее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(p^i + \frac{e}{c}A^i(\vec{x},t)\right) =$$

$$= \frac{dp^i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\dot{x}^k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -e\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^i}\right)\dot{x}^k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{dp^i}{dt} = -e\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{c\,\partial t}\right) - \frac{e}{c}\dot{x}^k\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x^i}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}}).}$$

Введём следующие 3-векторы:

$$E^i = -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$H^i = (\mathrm{rot}\,\vec{A})^i = [\vec{\nabla}\times\vec{A}]^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

$\boxed{\text{У}}$ С такими обозначениями уравнения движения частицы запишутся в виде:

$$\frac{dp^i}{dt} = eE^i + \frac{e}{c}[\dot{\vec{x}}\times\vec{H}]^i = F_\Lambda \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ — электрическое поле,

$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]$ — магнитное поле.

Доказательство.

При доказательстве удобно использовать следующие свойства полностью антисимметрического тензора ε^{ijk}:

1°. $\forall\, i, j, k, a, b, c \in \{1, 2, 3\}$:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abc} = \det\begin{vmatrix} \delta^i_a & \delta^i_b & \delta^i_c \\ \delta^j_a & \delta^j_b & \delta^j_c \\ \delta^k_a & \delta^k_b & \delta^k_c \end{vmatrix} =$$

$$= \delta^i_a\delta^j_b\delta^k_c - \delta^i_a\delta^j_c\delta^k_b + \delta^i_c\delta^j_a\delta^k_b - \delta^i_c\delta^j_b\delta^k_a + \delta^i_b\delta^j_c\delta^k_a - \delta^i_b\delta^j_a\delta^k_c.$$

2° $$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abk} = \delta^i_a\delta^j_b - \delta^i_b\delta^j_a$$

3° $$\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ajk} = 2\delta^i_a$$

Очевидно, что проверить надо только слагаемое с полем $\vec{H}$:

$$\frac{e}{c}[\dot{\vec{x}}\times\vec{H}]^i=\frac{e}{c}\varepsilon^{ijk}\dot{x}^j H^k=\frac{e}{c}\varepsilon^{ijk}\dot{x}^j\varepsilon^{kab}\partial_a A^b=$$

(суммирование по повторяющимся индексам)

$$=\left(\text{пользуемся } 2^\circ:\ \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kab}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abk}=\delta^i_a\delta^j_b-\delta^i_b\delta^j_a\right)=$$

$$=\frac{e}{c}\left(\delta^i_a\delta^j_b-\delta^i_b\delta^j_a\right)\dot{x}^j\partial_a A^b=$$

$$=\frac{e}{c}\partial_i(\vec{A}\dot{\vec{x}})-\frac{e}{c}(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla})A^i$$ — это в точности совпадает с выражением в правой части уравнения движения.

Посмотрим на выражение

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}A^0-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H}=[\vec{\nabla}\times\vec{A}].$$

Если A^μ не зависит от t (стационарное поле), то $\vec{E}=-\vec{\nabla}A^0$ — стационарное электрическое поле потенциально. $A^0(\vec{x})$ — потенциал поля.

Кроме того, не все компоненты $\vec{E}$ и $\vec{H}$ независимы.
Вычислим дивергенцию поля $\vec{H}$:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \partial_i H^i = \varepsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A^k \equiv 0.$$

Вычислим, также, $\operatorname{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla}\times\vec{E}]$:

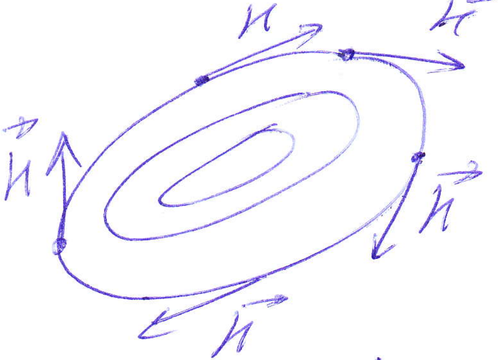
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\underbrace{[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}]}_{0}A^0 - \frac{1}{c}\left[\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

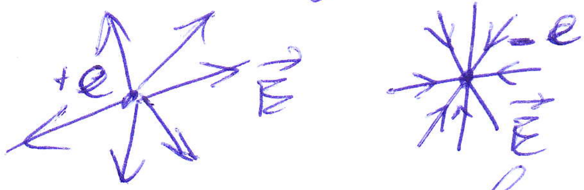
Уравнения
$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{div}\vec{H} \equiv 0\\ &[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\end{aligned}}$$

образуют первую пару уравнений Максвелла. Они не динамические, это тождественные равенства, следующие из выражения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через A^μ.
~~Это надо~~ Мы видим, что на 6 компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$ наложены 4 условия (1 скалярное и 1 векторное тождество) $\Rightarrow$ поле в любой точке пространства имеет 2 степени свободы.
Физический смысл 1й пары уравнений Максвелла – глубокий и важный.

div $\vec{H} = 0$ говорит о том, что в природе отсутствуют магнитные заряды — источники поля $\vec{H}$. Силовые линии магнитного поля всегда <u>замкнуты</u> (или уходят на ∞). Напомним, что силовая линия поля — это кривая в $\mathbb{R}^3$, касающаяся в каждой своей точке векторного поля;



Поле $\vec{E}$ — имеет источники — заряды:



Второе (векторное) уравнение выражает знаменитый <u>закон Фарадея</u>: меняющееся во времени магнитное поле ($\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \neq 0$) порождает электрическое поле. Можно сказать, что этот закон — <u>основа энергетики</u> всей нашей цивилизации: подавляющее большинство промышленных генераторов электроэнергии работает на ~~[illegible]~~ реализации этого закона.

Ещё 2 уравнения Максвелла мы получим позже, когда введём динамику для A^μ.

Выразим $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в Пуанкаре-инвариантном виде:

$$E^i = -\partial_i A^0 - \frac{1}{c}\partial_t A^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i$$

Здесь $\partial^0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$

$$H^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k = -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k \equiv$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j).$$

$\boxed{0}$ Тензор напряжённостей электромагнитного поля:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}.$$

Это антисимметричный тензор второго ранга: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ и при преобразованиях Лоренца

$$x \mapsto x' = \Lambda x$$

$F^{\mu\nu}$ ведёт себя так:

$$F^{\mu\nu}(x) \mapsto F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x).$$

Согласно определению $F^{\mu\nu}$:

$$E^i = -F^{0i}$$

$$H^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{abi}H^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{abi}\varepsilon^{jki}F^{jk} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\delta^a_j\delta^b_k - \delta^a_k\delta^b_j\right)F^{jk} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F^{ab} - F^{ba}\right) = -F^{ab} \quad a,b\in\{1,2,3\}.$$

Итак $F^{0i} = -E^i \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}H^k \Rightarrow$

запишем $F^{\mu\nu}$ в виде матрицы 4×4:

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} \mu\backslash\nu & \begin{matrix} \;0\; & \;\;1\;\; & \;\;2\;\; & \;\;3\;\; \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Это ↗ выражение позволяет легко найти закон преобразования компонент напряжённостей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитного поля при преобразованиях Лоренца.

$\boxed{\text{Упр}}$ Для буста вдоль оси Ox

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{th}\theta = \frac{v}{c}}$$

определите правило пересчёта компонент $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в движущуюся систему отсчёта.

Указание $F'(\vec{E}', \vec{H}') = \| F'^{\mu\nu} \|$ и соотношение $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$ в матричном виде записывается так:

$$\underline{F' = \Lambda F \Lambda^{T}.}$$

Получим 1-ю пару уравнений Максвелла в терминах тензора $F^{\mu\nu}$.

Построим инвариантную 2-форму

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu}(x)\, dx_{\mu} \wedge dx_{\nu}$$

$\boxed{\text{У}}$ 2-форма $\tilde{F}$ – точная: $\tilde{F} = d\tilde{A}$, где 1-форма $\tilde{A} = A^{\mu}(x)\, dx_{\mu}$

<u>Доказательство</u>

$$d\tilde{A} = \cancel{\partial A^{\mu}}\, dA^{\mu} \wedge dx_{\mu} = \partial^{\nu} A^{\mu}\, dx_{\nu} \wedge dx_{\mu} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \partial^{\nu} A^{\mu}\, dx_{\nu} \wedge dx_{\mu} + \frac{1}{2} \partial^{\mu} A^{\nu}\, dx_{\mu} \wedge dx_{\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) dx_\mu \wedge dx_\nu = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$$

Мы воспользовались нильпотентностью дифференциала $d^2 = 0$ и антисимметричностью внешнего произведения 1-форм:

$$dx_\nu \wedge dx_\mu = - dx_\mu \wedge dx_\nu$$ ■

В силу точности $\tilde{F}$ имеем тождество:

$$d\tilde{F} = d^2 \tilde{A} \equiv 0$$

$$d\tilde{F} = \frac{1}{2} \partial^\lambda F^{\mu\nu} dx_\lambda \wedge dx_\mu \wedge dx_\nu \equiv 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \partial^{[\lambda} F^{\mu\nu]} \equiv 0$ $[\alpha\beta\gamma]$ – ~~полностью~~ полная антисимметризация:

$$X^{[\alpha\beta\gamma]} \equiv X^{\alpha\beta\gamma} - X^{\alpha\gamma\beta} + X^{\gamma\alpha\beta} - \dots$$

Поскольку $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, то

$$\partial^{[\lambda} F^{\mu\nu]} = 2\left(\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu}\right)$$

Итак, получаем

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} \equiv 0}$$

В силу антисимметричности по λ, μ, ν их надо выбирать не равными друг другу из набора $\{0, 1, 2, 3\}$.

Это можно сделать 4 способами (порядок не важен).

Для $\mu = 1 \quad \nu = 2 \quad \lambda = 3$:

$$\partial^3 F^{12} + \partial^2 F^{31} + \partial^1 F^{23} = 0$$

$$\| F^{\mu\nu} \| = \begin{vmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \to F^{12} \\ \to F^{23} \\ \to F^{31} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\partial^3 H^3 - \partial^2 H^2 - \partial^1 H^1 = \operatorname{div} \vec{H} \equiv 0$$

Для $\mu = 0 \quad \{\nu, \lambda\} = \{1, 2\}$ или $\{3, 1\}$ или $\{2, 3\}$.

Это 3 компоненты $[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

Например $\underline{\mu = 0 \quad \nu = 1 \quad \lambda = 2}$:

$$\partial^2 F^{01} + \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} =$$

$$= -\partial^2 E^1 + \partial^0 (-H^3) + \partial^1 E^2 =$$

$$= \underline{\partial_2 E^1 - \partial_1 E^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial H^3}{\partial t} = -[\vec{\nabla} \times \vec{E}]^3 - \frac{\partial H^3}{c\, \partial t} \equiv 0.$$

Наконец, рассмотрим ещё одно важное следствие выражений $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через компоненты A^μ. Эти выражения неоднозначны.

Одним и тем же наблюдаемым $\vec{E}$ и $\vec{H}$ отвечает целый класс 4-векторных полей A^μ. В терминах $F^{\mu\nu}$ это видно очень просто. Рассмотрим наряду с A^μ 4-вектор B^μ:

$$B^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – $\forall$ гладкая скалярная функция. Тогда:

$$F^{\mu\nu}(B) = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu\partial^\nu\alpha - \partial^\nu\partial^\mu\alpha \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}(A).$$

Поскольку $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выражаются через компоненты $F^{\mu\nu}$, то поле B^μ приводит к тем же полям $\vec{E}$ и $\vec{H}$, что и A^μ.

Преобразование $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$ называется калибровочным и, поскольку наблюдаемые величины инвариантны относительно таких преобразований, то и действие системы частицы + поле будем выбирать калибровочно-инвариантным. Это обеспечит калибровочную инвариантность <u>уравнений движения</u> и, как следствие, эволюция системы не будет разрушать калибровочную инвариантность наблюдаемых величин.

$\boxed{\text{Зам}}$ $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \alpha$ — простейшее калибровочное преобразование. Эти преобразования образуют (бесконечномерную) <u>абелеву группу</u>. $\exists$ модели теории поля с неабелевой калибровочной группой (полевые модели Янга-Миллса). Калибровочная инвариантность — одно из важнейших свойств релятивистски инвариантных полевых моделей. Этой симметрии отвечают <u>тождества</u> на уравнения движения (тождества Бьянки) — вторая теорема Нётер. При переходе к квантованию калибровочная инвариантность приводит к дополнительным трудностям (системы со связями).

Заметим, что наше простейшее взаимодействие $S_{int} = \int\limits_{\gamma} A^\mu dx_\mu$ — калибровочно инвариантно: $B^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha \Rightarrow$

$$\int\limits_{\gamma} B^\mu dx_\mu = \int\limits_{\gamma} A^\mu dx_\mu + \int\limits_{\gamma} d\alpha =$$

$$= \int\limits_{\gamma} A^\mu dx_\mu + \underbrace{\alpha(x_{кон}) - \alpha(x_{нач})}_{\text{несуществен. константы}}$$