1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

10.1 Решение уравнения Гамильтона-Якоби и канонические преобразования

Вернемся опять к тому, что действие на решении уравнений движения – как функция конечных координат и времени $S = S(q,t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q; t\right) = 0 \tag{1}$$

где $S = S(q;t)$ есть функция времени и N координат, и можно рассматривать (1) просто как уравнение первого порядка в частных производных. Как решение задачи Коши уравнение (1) зависело бы от выбора произвольной (начальной) функции $S|_{t=0} = S_0(q_1, \dots, q_N)$, однако для целей интегрирования канонических уравнений достаточно найти решения (1), зависящее от $N+1$ произвольных постоянных (т.н. полный интеграл).

В частности, мы рассмотрели пример свободной частицы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

для которого решение имеет достаточно непривычный на первый взгляд вид

$$S = -Et + \sqrt{2mE}\; q + C \tag{3}$$

где E – одна из таких констант, легко отождествляемая с энергией системы.

Теорема Якоби: Если найден полный интеграл (1), т.е. решение

$$S = f(t; q_1, \dots, q_N; \alpha_1, \dots, \alpha_N) + C \tag{4}$$

то канонические уравнения Гамильтона решаются в квадратурах.

Доказательство опять же вытекает из того, что теперь уже формула (4) имеет смысл канонического преобразования, если рассматривать параметры $\{\alpha\}$ как набор новых координат (или импульсов). При этом в силу (1)

$$\mathbb{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \tag{5}$$

т.е. новые переменные $\{\alpha\}$ (и им сопряженные $\{\beta\}$!) удовлятворяют каноническим уравнениям с *нулевым* гамильтонианом

$$\dot{\alpha}_i = 0, \qquad \dot{\beta}_i = 0, \qquad i = 1, \dots, N \tag{6}$$

а значит решение (4) приводит к системе

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{7}$$

из N *алгебраических* уравнений, из которых можно в принципе найти

$$q_i = q_i(t; \alpha, \beta), \qquad i = 1, \dots, N \tag{8}$$

т.е. интересующие нас координаты системы как функции времени и $2N$ постоянных (связанных, например) с граничными условиями.

Уже пример свободной частицы (2), (3) приводит к мысли, что верно:

Замечание: Вообще, в случае сохраняющейся энергии, действие можно представить в виде

$$S(q,t) = \tilde{S}(q) - Et \tag{9}$$

где функция $\tilde{S}(q)$ удовлетворяет уже уравнению Гамильтона-Якоби

$$H\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, q\right) = E \tag{10}$$

Действительно, в силу того, что

$$\begin{gathered} dS = pdq - Hdt \\ S = \int pdq - \int Hdt \underset{H=E=\text{const}}{=} \int pdq - Et = \tilde{S}(q) - Et \\ p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} \end{gathered} \tag{11}$$

уравнение (1) при постоянной энергии сводится к (10).

У этого рассуждения есть замечательный квантовый аналог, когда нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \tag{12}$$

переходит в уравнение на спектр гамильтониана

$$\hat{H}\tilde{\Psi} = E\tilde{\Psi} \tag{13}$$

при подстановке $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\tilde{\Psi}$ и квазиклассическом соответствии

$$\Psi \underset{\hbar\to 0}{\sim} e^{\frac{i}{\hbar}S}, \qquad \tilde{\Psi} \underset{\hbar\to 0}{\sim} e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{S}} \tag{14}$$

10.2 Разделение переменных

Уравнение Гамильтона-Якоби реально решается только в случае разделения переменных, т.е. когда (будем для простоты говорить о форме (10), для зависящего от времени уравнения (1) рассуждения аналогичны) разделения переменных, т.е. когда можно выбрать такие координаты, что, например, гамильтониан системы схематично можно представить как

$$H\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q}, q\right) = H\left(h_1\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_1}, q_1; h\right), \ldots, h_N\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q_N}, q_N; h\right)\right) \tag{15}$$

для набора функций двух переменных $\{h_i = h_i(p, q)\}$, $i = 1, \ldots, N$. Действительно, тогда ищем решение (10) в виде

$$\tilde{S}(q_1, \ldots, q_N) = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_j(q_j; \alpha) \tag{16}$$

и, подставляя этот анзац в (15), получаем

$$h_i\left(\frac{d\hat{S}}{dq_i}, q_i; \alpha\right) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{17}$$

где N *интегралов движения* $\{\alpha\}$ лежат на поверхности

$$H(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = E \tag{18}$$

Каждое из уравнений (17) решается в квадратурах, что с помощью (16) дает полный интеграл

$$S(q_1, \ldots, q_N; t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{S}_j(q_j; \alpha_j) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)t + C \tag{19}$$

что позволяет применить теорему Якоби, и найти решение из алгебраических уравнений (7).

Пример: Задача Кеплера о движении в центрально-симметричном поле с гамильтонианом

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r) \tag{20}$$

разделяется в сферических координатах (r, θ, ϕ). Буквально можно написать

$$h_\phi = \frac{p_\phi^2}{2m}, \qquad h_\theta = \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{h_\phi}{\sin^2\theta}$$
$$h_r = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{h_\theta}{r^2} + U(r) \tag{21}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (10) принимает вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + U(r) + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \phi}\right)^2 = E \tag{22}$$

и при использовании подстановки (16) получаем

$$\tilde{S}(t,\theta,\phi) = \hat{S}_r(r) + \hat{S}_\theta(\theta) + \hat{S}_\phi(\phi)$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\hat{S}_r}{dr}\right)^2 + U(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{d\hat{S}_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\hat{S}_\phi}{d\phi}\right)^2\right] = E \tag{23}$$

или

$$\left(\frac{d\hat{S}_\phi}{d\phi}\right)^2 = \alpha_\phi, \qquad \left(\frac{d\hat{S}_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta$$
$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\hat{S}_r}{dr}\right)^2 + U(r) + \frac{\alpha_\theta}{2mr^2} = E \tag{24}$$

откуда

$$\hat{S}_\phi = \sqrt{\alpha_\phi}\phi, \qquad \hat{S}_\theta = \int^\theta d\zeta \sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\phi}{\sin^2\zeta}}$$
$$\hat{S}_r(r) = \sqrt{2m}\int^r ds \sqrt{E - \frac{\alpha_\theta}{2ms^2} - U(s)} \tag{25}$$

10.3 Интегрируемость: интегралы движения

Давайте еще раз взглянем на решение уравнения Гамильтона-Якоби в “укороченной форме” (10). Что на самом деле утверждается

- Если это уравнение решается, то существует функция $\tilde{S} = \tilde{S}(q, \alpha)$, осуществляющая каноническое преобразование от координат $\{q\}$ к новым координатам (а лучше – импульсам) $\{\alpha\}$.

- Уравнение (10) утверждает
$$H\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial q}, q\right) = E(\alpha) \tag{26}$$
что в новых переменных гамильтониан зависит только от половины координат на фазовом пространстве.

- Таким образом, в новых переменных можно написать
$$\begin{gathered}\omega = dp\wedge dq = d\alpha\wedge d\tilde{\beta}\\ \dot{\alpha}_i = 0, \quad \dot{\tilde{\beta}}_i = \frac{\partial E}{\partial\alpha_i}, \quad i = 1,\dots,N\\ \{\alpha_i,\alpha_j\} = 0, \quad i,j = 1,\dots,N\end{gathered} \tag{27}$$
Важно, что интегралы движения выступают в качестве новых импульсов (можно – или координат!?), которые находятся в пуассоновой инволюции, т.е. "интерес представляют" интегралы движения, которые коммутируют друг с другом.

  Действительно, мы уже решали уравнение Гамильтона-Якоби с помощью функции
$$S(q,\alpha;t) = \tilde{S}(q,\alpha) - E(\alpha)t \tag{28}$$
и соотношений
$$\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \beta = \mathrm{const} \tag{29}$$
Из последних соотношений в частности следует, что
$$\tilde{\beta}_i = \frac{\partial\tilde{S}}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial S}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial E}{\partial\alpha_i}t = \beta_i + \frac{\partial E}{\partial\alpha_i}t, \quad i = 1,\dots,N \tag{30}$$
действительно являются линейными функциями времени.

Когда с помощью канонического преобразования можно перейти к новым переменным, для которых выполняются соотношения (27), то говорят, что систему можно *полностью проинтегрировать*. Нам осталось понять как это эффективно делать в тех случаях, когда переменные не разделяются в уравнении Гамильтона-Якоби, но для начала установить некоторые основные общие свойства интегрируемых систем.