Лекция 11. Элементарные свойства дифференцируемых функций

1 Производная сложной функции.

Что происходит с главными линейными частями функций при композиции функций? Проще всего ответить на этот вопрос, когда сами функции линейны. Пусть

$$f(x) = ax,\ \ g(x) = bx.$$

Тогда

$$f \circ g(x) = a(bx) = abx.$$

Следовательно, при композиции линейных функций их производные перемножаются. Аналогичный результат верен и для композиции нелинейных функций.

Теорема 1 *о производной сложной функции. Пусть функции f и g дифференцируемы на интервалах X и Y соответственно, причем $g(Y) \subset X$. Тогда функция $f \circ g$ дифференцируема на X, причем*

$$(f \circ g)'(x) = f' \circ g(x) \cdot g'(x). \tag{1}$$

Доказательство Имеем:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + o(h)$$
$$f(y+k) = f(y) + f'(y)k + o(k).$$

Тогда

$$f \circ g(x+h) = f \circ (g(x) + g'(x)h + o(h)).$$

Положим: $g(x) = y,\ g'(x)h + o(h) = k$. Тогда

$$f \circ g(x+h) = f(y+k) = f(y) + kf'(y) + o(k) = f \circ g(x) + (g'(x)h + o(h))f' \circ g(x) + R_1(k) =$$
$$f \circ g(x) + f' \circ g(x) \cdot g'(x)h + R(h),$$

где $R_1(k) = o(k)$, $R(h) = o(h) \cdot f' \circ g(x) + R_1(g'(x)h + o(h))$.

Докажем, что $R(h) = o(h)$. Рассмотрим

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{o(h)}{h} \cdot f' \cdot g(x) + \frac{R_1(g'(x)h + o(h))}{h} \right).$$

Предел первого слагаемого равен нулю. Рассмотрим предел второго. По определению, $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta : |R_1(k)| < \varepsilon|k|$ при $|k| < \delta$. Возьмем δ_1 столь малым, что при $|h| < \delta_1,\ |k(h)| \leq |g'(x) + 1||h|$. Тогда при $|h| < \delta_1,\ \frac{|R_1(k(h))|}{|h|} \leq \varepsilon|g'(x) + 1|$. Следовательно,

$$R_1(k(h)) = o(h).$$

Значит, $R(h) = o(h)$. □

2 Производная обратной функции.

Мы уже умеем обращать монотонные непрерывные функции. Осталось только найти производную обратной функции в случае, когда сама функция дифференцируеса.

Теорема 2 *Пусть фунеция f монотонна и дифференцируема на интервале I, и ее производная нигде на этом интервале не равна нулю. Тогда обратная к ней функция монотонна и дифференцируема на интервале $f(I)$, и ее производная равна*

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}. \tag{2}$$

Доказательство Дадим два доказательства этой замечательной теоремы. Первое использует теорему о производной сложной функции. Второе - геометрическое определение производной.

Геометрическое доказательство формулы (2)

Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов. Если предел секущих в каждой точке некоторой кривой существует, то он существует и для симметричной кривой. Касательная к гоафику функции f^{-1} в точке $(x, f^{-1}(x))$ симметрична касательной к графику функции f в точке $(f^{-1}(x), x)$; заметим, что $x = f(f^{-1}(x))$. Тангенсы угла наклона этих касательных взаимно обратны. Отсюда следует теорема 2.

Аналитическое доказательство формулы

Заметим, что из дифференцируемости следует непрерывность, а существование обратной для монотонной и непрерывной функции уже доказано. Обозначим обратную функцию через g:

$$f^{-1} = g.$$

Тогда

$$f \circ g(x) \equiv x.$$

Дифференцируемость функции g вытекает из гкометрического даказательства. Следовательно,

$$(f \circ g)'(x) = f' \circ g(x) \cdot g'(x) \equiv 1.$$

Отсюда следует (2).

□

3 Скорость и рост.

Напомним, что производная - это скорость. Поэтому к каждой из дальнейших теорем этой лекции дается ее “житейская” интерпретация.

Теорема 3 *Если функция f дифференцируема в точке 0 и $f'(0) > 0$, то $f(x) > f(0)$ при малых $x > 0$ и $f(x) < f(0)$ при малых $x < 0$.*

У кого скорость положительна, тот продвинется вперед.
Доказательство По второму определнию производной

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) = h(f'(x) + o(1)).$$

Возьмем δ столь малым, что $|o(1)| < \frac{|f'(x)|}{2}$. Тогда второй сомножитель положителен. Следовательно, приращение функции $f(x+h) - f(x)$ имеет тот же знак, что и приращение аргумента h. □

4 Теорема Ферма.

Определение 1 *Точка, в которой производная функциии обращается в ноль, называется критической точкой этой функции.*

Теорема 4 *Если функция f дифференцируема на интервале и имеет максимум или минимум в точке a, то $f'(a) = 0$. Другими словами, точка a - критическая для функции f.*

Кто дошел до крайней точки пути, тот на мгновение остановился, чтобы повернуть назад.
Доказательство Теорема Ферма немедленно следует из теоремы о скорости и росте. А именно, предположим, что теорема неверна. Пусть x - точка локального максимума функции f, и $f'(x) > 0$; для локального минимума и для случая $f'(x) < 0$ рассуждение аналогично. По теореме о скорости и росте при малом положительном h

$$f(x+h) - f(x) > 0.$$

Это противоресит определению локального максимума. □

5 Теорема Ролля.

Теорема 5 *Если функция диференцируема на интервале, то между любыми двумя ее нулями есть ноль ее производной.*

Кто вернулся на старое место, тот должен был повернуть.
Доказательство Пусть функция f дифференцируема на интервале (α, β), $a, b \in (\alpha, \beta)$, и $f(a) = f(b) = 0$. По теореме 2 лекции 10 функция f непрерывна. Ранее

доказано, что непрерывная функция на отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения; обозначим их M и m соответственно. Заметим, что $M \geq 0,\ m \leq 0$, поскольку $f(a) = 0$.

Пусть $M = m = 0$. Тогда $f \equiv 0$, и все точки отрезка $[a, b]$ - критические для f.

Пусть $M > 0$. Тогда существует точка $c \in [a, b] : f(c) = M$.

Отметим, что $c \in (a, b)$ поскольку $f(c) = M > 0,\ f(a) = f(b) = 0$. По теореме Ферма, 0 - критическая точка. Это доказывает теорему Ролля при $M > 0$.

Случай $M = 0,\ m < 0$ разбирается аналогично. □

6 Теорема Лагранжа о конечном приращении.

Теорема 6 *Если функция диференцируема на интервале I , то между любыми двумя точками $a, b \in I$ существует такое c, что $f(a) - f(b) = (a - b)f'(c)$.*

Между любыми двумя моментами движения существует такой, когда мгновенная скорость равна средней.

Доказательство Рассмотрим разность между функцией f и линейной функцией L, график которой проходит через точки $(a, f(a)),\ (b, f(b))$. Тогда

$$g(x) = f(x) - L(x)$$

обращается в 0 в точках a и b. По теореме Ролля, g имеет критическую точку $c \in (a, b)$:

$$g'(c) = f'(c) - L'(c) = 0.$$

Следовательно, $f'(c) = L'(c)$. Но тангенс угла наклона графика функции L к положительной полуоси равен

$$L'(x) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Следовательно,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

7 Теорема о нулевой призводной

Теорема 7 *Если $f' \equiv 0$ на некотором интервале, то $f \equiv const$ на этом интервале.*

Кто движется с нулевой скоростью, тот будет стоять на месте.

Доказательство Пусть существуют такие $a, b \in I$, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда, по теореме Лагранжа, существует такое $c \in (a, b)$, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$ - противоречие. □