Листок 3

Во всех задачах, где появляются координаты, в векторном (аффинном) евклидовом пространстве выбран ортонормированный базис (репер).

1. Даны две матрицы A_{rs}, B_{sr}, $r \leq s$. Доказать, что отношение характеристического многочлена матрицы BA к характеристическому многочлену матрицы AB равно x^{s-r}.

2. Присмотревшись к алгоритму ортогонализации Грама-Шмидта, докажите, что любую вещественную невырожденную квадратную матрицу можно разложить в прозведение ортогональной и треугольной матриц того же порядка.

Насколько однозначно такое разложение? Верен ли аналогичный факт для вырожденных матриц?

3. Придумать определение угла между двумя плоскостями в четырехмерном евклидовом пространстве и найти угол между линейными оболочками векторов $L_1 = \{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ и $L_2 = \{(2,2,1,0),(1,-2,2,0)\}$.

4. Найти число главных диагоналей n-мерного куба, ортогональных фиксированной главной диагонали. Почему это число не зависит от выбранной диагонали?

5. Доказать, что если две плоскости (не обязательно размерности 2) в аффинном евклидовом пространстве не имеют общих точек, то у них есть общий перпендикуляр. Длина общего перпендикуляра меньше длины любого отрезка, концы которого находятся на данных плоскостях (доказать). Сформулировать (и доказать) условие единственности общего перпендикуляра.

6. Доказать, что прямая, соединяющая центры двух противоположных (что это значит?) граней правильного n-мерного симплекса, ортогональна этим граням.

7. В n-мерном евклидовом пространстве заданы два семейства векторов $P = \{p_1, \ldots, p_s\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_s\}$. Доказать, что для существования ортогонального оператора, переводящего p_i в q_i, $i = 1, \ldots, s$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы Грама этих семейств были равны.

8. Пусть $G(r_1, \ldots, r_s)$ – матрица Грама семейства векторов $r_1, \ldots, r_s$. Доказать, что $\det G \leq (r_1, r_1) \times (r_2, r_2) \times \ldots (r_s, r_s)$.

9. В пространстве вещественных квадратных матриц, снабженном скалярным произведением $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^t)$, рассмотрим оператор L_Q умножения слева на фиксированную симметричную матрицу Q. Доказать,что L_Q самосопряженный линейный оператор. Найти связь между:
а) собственными значениями оператора L_Q и матрицы Q;
б) ортонормированным базисом собственных векторов матрицы Q и ортонормированным базисом собственных векторов оператора L_Q.

10. Пусть в матрице Грама семейства векторов некоторый главный минор равен нулю. Доказать, что тогда равен нулю и любой окаймляющий (это как?) его минор большего порядка (если таковые имеются).