Гладкие многообразия

С.М.Натанзон

Contents

1. Категория гладких многообразий

1.1. **Гладкие многообразия.** Анализ, который вы изучали на 1 курсе, позволяет исследовать гладкие преобразований подмножеств множества $\mathbb{R}^n$. В реальной жизни, однако, интересующие нас множества не имеют естественной структуры подмножества множества $\mathbb{R}^n$. Для их исследования эту структуру приходится вводить дополнительно Более того, эту дополнительную структуру можно вводить по разному.

Например, для описания и исследования московской области ее удобно покрыть мысленной сеткой параллелей и меридианов расстояния между которыми мерятся в километрах. Но можно, конечно, как это делалось раньше, покрыть область сеткой, где расстояние мериться в верстах. Можно вообще, если это покажется удобным, повернуть сетку на какой-то угол. Для согласования различных систем координат нужно использовать функции перехода, пересчитывающие одну систем координат в другую.

Такой подход, это особенно важно, годится и для множеств, которые по топологическим причинам не является подмножеством $\mathbb{R}^n$. Например для исследования всего земного шара или областей гомеоморфных тору и т.п. В этом случае мы поступаем так, как это делается в картографии. То есть, мы произвольным образом покрываем множество областями (картами) гомеоморфными

$\mathbb{R}^n$, вводим на этих областях системы координат и указываем отображения перехода между системами координат для подмножеств, попадающих в несколько карт. Для того, чтобы функции гладкие в одной системе координат оставались гладкими и в другой системе координат надо, чтобы отображения перехода были гладкими.

Дадим теперь формальное определение

Рассмотрим хаусдорфово сепарабельное топологическое пространство M_0. *Картой размерности* n на M_0 называется пара (U, φ), где $U \subset M_0$ — открытое подмножество M_0 и $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм на открытое подмножество $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ называется *атласом*, если $\bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} U_\alpha = M_0$. Размерности всех карт атласа связного многообразия совпадают. Эту размерность мы будем называть размерностью многообразия. Далее, если не оговорено противное, мы будем считать, что размерности всех компонент связности многообразия совпадают.

Карты $\{(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}\}$ и $\{(U_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_2}\}$ называются *пересекающимися*, если $U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Пересекающимся картам отвечают непустые множества $V_1 = \varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$, $V_2 = \varphi_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$ и гомеоморфизм $\varphi_{1,2} = \varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}^{-1} : V_1 \to V_2$. Отображения $\varphi_{1,2}$ называются *отображениями перехода.* Атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ называется *гладким*, если все отображения перехода являются гладкими, то есть бесконечно дифференцируемыми функциями.

Карту (U, φ) назовем *согласованной с гладким атласом* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ если все отображения перехода между картами (U, φ) и $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ являются гладкими.

Гладкие атласы $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ и $\{(U_\beta, \varphi_\beta)|\beta \in \Upsilon\}$ считаются *эквивалентными*, если их объединение $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)|\alpha \in \Sigma, \beta \in \Upsilon\}$ также является гладким атласом.

Задача 1.1. *Докажите, что гладкие атласы* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ *и* $\{(U_\beta, \varphi_\beta)|\beta \in \Upsilon\}$ *эквивалентны, если и только если все карты* (U_β, φ_β) *согласованы с а атласом* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$.

Класс эквивалентности гладких атласов называется *гладкой структурой.* Многообразие с гладкой структурой называется *гладким многообразием.* Приведем несколько простейших примеров гладких многообразий.

Пример 1.1. *Векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ *обладает естественной картой, превращающей ее в гладкое многообразие. Эта гладкая структура на* $\mathbb{R}^n$ *называется стандартной.*

Пример 1.2. *Рассмотрим гладкую функцию* $f : X \to \mathbb{R}$ *на области* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Её график* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}|x \in X\}$ *обладает естественной картой* $\varphi : \Gamma_f \to X$, *где* $\varphi(x, f(x)) = x$. *Эта карта превращает* Γ_f *в гладкое многообразие.*

Задача-пример 1.1. *Сфера* $S^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}| \sum\limits_{j=1}^{n+1}(x^j)^2 = 1\}$ *обладает атласом карт* (U_i^+, φ_i^+), (U_i^-, φ_i^-), *где* $i = 1, \dots, n+1$. *Эти карты состоят из областей* $U_i^+ = \{x \in S^n|x_i > 0\}$, $U_i^- = \{x \in S^n|x_i < 0\}$ *и отображений* $\varphi_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$. *Докажите, что этот атлас гладкий* .

Задача-пример 1.2. *Зададим структуру гладкого многообразия на проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$. *Будем представлять ее как множество прямых в* $\mathbb{R}^3$. *Каждая* *из прямых задаётся вектором с координатами (x, y, z), причем пропорциональные вектора задают одну и ту же прямую. Рассмотрим на $\mathbb{R}P^2$ атлас из 3 карт (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (U_3, φ_3), где $U_1 = \{(x, y, z)|x \neq 0\}$, $U_2 = \{(x, y, z)|y \neq 0\}$, $U_3 = \{(x, y, z)|z \neq 0\}$, $\varphi_1(x, y, z) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, $\varphi_2(x, y, z) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$, $\varphi_3(x, y, z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Докажите, что этот атлас гладкий. Постройте гладкий атлас для $\mathbb{R}P^n$.*

1.2. **Морфизмы и изоморфизмы.** Рассмотрим, какие дополнительные свойства приобретает топологическое многообразие M_0, если зафиксировать на нем гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$. В этом случае гомеоморфизм $\varphi_\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ позволяет отождествить область U_α с областью в $\mathbb{R}^n$ и считать, что функции на U_α — это хорошо известные нам функции от n переменных. Отображения перехода между картами позволяют исследовать глобальные свойства отображения. На пересечении двух карт отображение перехода записывается как замена координат отображения.

Для любой лежащей в U_α окрестности $U \subset U_\alpha$ точки $p \in U \subset U_\alpha$ мы можем, в частности, указать, какие отображения области U в пространство $\mathbb{R}^k$ считаются гладкими. Ввиду гладкости отображений перехода между картами (т.е. гладкость замены координат в $\mathbb{R}^n$), множество гладких отображений на U не зависит от того, подмножеством какой карты U_α считается множество U.

По тем же причинам множество гладких отображений не меняется при замене гладкого атласа на эквивалентный. Таким образом, структура гладкого многообразия позволяет выделить среди всех отображений $M_0 \to \mathbb{R}^k$ класс гладких отображений и с помощью карт исследовать их методами многомерного математического анализа.

Пусть M и N гладкие многообразия. Рассмотрим отображение $F : M_0 \to N_0$ и карты (U, φ), (V, ψ) из гладких атласов многообразий такие, что $F(U) \subset V$. Отображение F называется гладким на U, если отображение $\psi F \varphi : \varphi^{-1}(U) \to V$ является гладким. Назовем отображение F *гладким в точке* $p \in M$, если оно гладкое на некоторой окрестности p.

Задача 1.2. *Докажите, что гладкость отображения в точке не зависит от выбора карты (V, ψ) и не меняется при замене атласа на эквивалентный.*

Отображение, гладкое в каждой точке, назовем *гладким отображением.* Мы будем обозначать их $F : M \to N$. Именно такие отображения и являются *морфизмами в категории гладких многообразий.*

Гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}$ гладкого многообразия M на вещественную прямую со стандартной гладкой структурой называется *гладкой функцией.* Гладкие функции на M образуют алгебру $\mathcal{F}(M)$.

Гомеоморфизм между гладкими многообразиями $F : M \to N$ называется *диффеоморфизмом*, если он и обратный к нему $F^{-1} : N \to M$ являются гладкими. Другими словами, диффеоморфизм – это изоморфизм в категории гладких многообразий. Гладкие многообразия, между которыми существует диффеоморфизм, называются *диффеоморфными.*

Гладкие функции и отображения на диффеоморфных многообразиях обладают одинаковыми свойствами.

Задача 1.3. *Докажите, что диффеоморфизм $F : M \to N$ порождает по формуле $f \mapsto fF$ изоморфизм $F^* : \mathcal{F}(N) \to \mathcal{F}(M)$ между алгебрами гладких функций на N и M.*

Замечание 1.1. *Гомеоморфные гладкие многообразия не обязательно диффеоморфны, но примеры таких многообразий достаточно сложны.*

1.3. **Задание многообразий уравнениями.** В приложениях гладкие многообразия часто возникают как множества уровня $\{x \in U \subset \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$ гладких функций $f : U \to \mathbb{R}$. Сферу S^n из примера 1.1 можно рассматривать, например, как множество уровня $f(x) = 1$ для $f(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2$. Не все множества уровня образуют, однако, гладкие многообразия.

Пример 1.3. *Множество уровня $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (f(x_1, x_2) = c\}$ функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ является многообразием при $c \neq 0$, но не является многообразием при $c = 0$. В последнем случае множество уровня является объединением пересекающихся в нуле прямых $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, и поэтому не имеет карты, содержащей 0.*

Критерий, когда множество уровня является гладким многообразием следует из термы о неявной функции $f(x) = f(x_0)$, где $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Она утверждает, что, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) \neq 0,$$

то в малой окрестности U точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ множество уровня $\{x \in U | f(x) = f(x_0)\}$ совпадает с графиком некоторой гладкой функции $h = h(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$ на $V \subset \{(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)\} = \mathbb{R}^{n-1}$. То есть

$$\{x \in U | f(x) = f(x_0)\} =$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n | (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) \subset V; x^i = h(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)\}.$$

Пример 1.4. *Рассмотрим $f(x, y) = y - x^2$ в окрестности точки $(0, 0)$, где $f(0, 0) = 0$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 \neq 0$. Рассмотрим функцию $h(x) = x^2$. Тогда*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}; y = h(x)\}.$$

Теорема 1.1. *Рассмотрим гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и ее непустое множество уровня $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}$. Предположим, что градиент функции $\mathtt{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ не обращается в 0 на M_c. Тогда M_c — гладкое многообразие размерности $n - 1$.*

Proof. Пусть $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in M_c$. Из условия $\mathtt{grad} f(x_0) \neq 0$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \neq 0$ для некоторого i. Тогда, согласно теореме о неявной функции, существуют

- окрестность $x_0 \in \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$;
- окрестность $V_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ точки $(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$;
- гладкая функция $h^i = h^i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$ на V_i

такие, что

$$U_i = M_c \cap \widetilde{U}_i = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \in V_i;$$
$$x^i = h^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)\}.$$

Положим теперь $\tilde{\varphi}_i(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i|_{U_i}$. Тогда пара (U_i, φ_i) будет картой в окрестности точки x_0. Отображение перехода $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ имеет вид $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{j-1}, \tilde{x}^{j+1}, \dots, \tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^k = x^k$ при $k \neq i$ и $\tilde{x}^i = h^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и, следовательно, гладкое. $\square$

В качестве примера используем эту теорему, чтобы определить структуру гладкого многообразия на *специальной линейной группе* $SL(n, \mathbb{R})$, то есть на группе всех квадратных матриц порядка n с определителем 1. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ вложена в множество $M_n(\mathbb{R}) = \{A = \{a_{ij}\} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ всех квадратных матриц $A = \{a_{ij}\}$ порядка n. Множество $M_n(\mathbb{R})$ можно рассматривать как векторное пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами $\{a_{ij}\}$. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ является тогда множеством уровня $f(A)$=1 функции $f(A) = \det A$. Таким образом, мы определим на $SL(n, \mathbb{R})$ структуру гладкого многообразия, если докажем, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на $SL(n, \mathbb{R})$.

Докажем сначала, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на единичной матрице E. Разложив определитель по строке, находим, что

$$f(A) = \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(A) = \det A_{11}$. В частности $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$. Введем на множестве $M_n(\mathbb{R})$ новые координаты, сопоставив матрице $A \in SL(n, \mathbb{R})$ набор чисел $\{b_{ij}\}$, представляющий собой матричные элементы матрицы $B = A_0^{-1} A$. Тогда набору чисел $\{b_{ij}\}$ отвечает матрица $A(\{b_{ij}\}) = A_0 B$.

С другой стороны, $f(A(\{b_{ij}\})) = \det(A_0 B) = \det(A_0) \det(B) = \det(B) = f(B)$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(B) = \frac{\partial f}{\partial b_{11}}(A(\{b_{ij}\})) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}.$$

Левая часть равенства, как уже доказано, не равна 0. Следовательно, не равен 0 и градиент $\mathtt{grad} f$ в точке A_0.

Теорема 1.1 обобщается на случай гладких отображений $f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Роль градиента играет в этом случае матрица Якоби

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2. *Рассмотрим гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где $n > m$, и ее множество уровня $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что ранг матрицы Якоби $\mathtt{rang}(df)$ равен m на M_c. Тогда M_c — гладкое многообразие размерности $n - m$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1 с использованием теоремы о неявном отображении вместо теоремы о неявной функции.

Локальные карты строятся по следующей схеме. Из условия $\mathtt{rang}(df(x_0)) = m$ следует, что существуют номера $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ такие, что отвечающие им столбцы матрицы $df(x_0)$ линейно независимы. Рассмотрим столбцы, не вошедшие в этот список $I = (i_1, \dots, i_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Тогда в окрестности точки x_0 существует карта вида (U_I, φ_I), где $\varphi_I(x_1 \dots, x_n) = (x_{i_1} \dots, x_{i_{n-m}})$

Задача 1.4. *Доказать теорему 1.2.*

Задача 1.5. *Построить структуру гладкого многообразия на двумерном торе* $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 | (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1; (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$.

2. Касательное пространство

2.1. **Касательные векторы.** Для гладких многообразий $M \subset \mathbb{R}^N$ (например, заданных в $\mathbb{R}^N$ уравнениями) касательное пространство T_p в точке $p \in M$ имеет очевидный геометрический смысл. Это плоскость в $\mathbb{R}^N$ размерности $\dim M$, касающаяся M в точке p.

Пространство T_p состоит из касательных векторов, выходящих из точки p. Касательному вектору отвечает множество касающихся его гладких путей $\gamma : [0,1] \to M \subset \mathbb{R}^N$, выходящих из точки p (т.е. $\gamma(0) = p$). Два пути γ_1 и γ_2, отвечающие одному вектору касаются между собой, то есть

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0).$$

Или, что тоже самое,

$$(\gamma_1 - \gamma_2)(t) = O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Мы будем называть такие пути γ_1 и γ_2 *эквивалентными*. Таким образом, касательное пространство T_p для гладкого многообразия M вложенного в $\mathbb{R}^N$ можно понимать как совокупность классов эквивалентности гладких путей выходящих из $p \in M$.

Заметим теперь, что это определение легко переносится на произвольное гладкое многообразие M. Гладкое отображение $\gamma : [0,1] \to M$, где $\gamma(0) = p$, мы будем называть гладким путем из точки p. Рассмотрим содержащую p карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Пути γ_1 и γ_2 назовем *эквивалентными*, если пути $\varphi\gamma_1$ и $\varphi\gamma_2 : U \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны, то есть

$$(\varphi\gamma_1 - \varphi\gamma_2)(t) = O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Задача 2.1. *Докажите, что эквивалентность путей не меняется при замене карты U на другую карту того же гладкого атласа и при замене гладкого атласа на эквивалентный.*

Класс эквивалентности путей называется *касательным вектором в точке p*. Множество касательных векторов T_p называется *касательным пространством* многообразия M в точке p.

Точку $p \in U$ назовем *центром карты* (U, φ), если $\varphi(p) = 0$

Задача 2.2. *a) Для каждой точки p гладкого многообразия существует карта с центром в p, согласованная с гладким атласом многообразия.*

b)Рассмотрим согласованную с гладким атласом многообразия карту (U, φ) с центром в p. Касательное пространство T_p имеет структуру векторного пространства относительно сложения $\varphi^{-1}(\varphi\gamma_1 + \varphi\gamma_2)$ и умножения на константу $\varphi^{-1}k(\varphi\gamma)$. Эта структура не зависит от выбора карты (U, φ).

Задача 2.3. *Пусть $F : M \to N$ — диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что соответствие путей $\gamma(t) \to F\gamma(t)$ порождает изоморфизм касательных пространств $F_* : T_p \to T_{F(p)}$.*

Пример 2.1. *Опишем касательное пространство в точке $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ к многообразию $\mathbb{R}^n$. Сопоставим каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ путь $\gamma_v(t) = x_0 + tv$. Эти пути не эквивалентны для разных векторов v. С другой стороны, согласно формуле Тейлора, любой путь $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ с началом в x_0 эквивалентен пути $\gamma_v(t)$, где $v(t) = (\frac{\partial x^1(t)}{\partial t}(0), \dots, \frac{\partial x^n(t)}{\partial t}(0))$. Таким образом, касательное пространство $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с самим $\mathbb{R}^n$. Вектор касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, отвечающий стандартному базисному вектору e_i пространства $\mathbb{R}^n$, обозначается $\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0)$. Он отвечает пути $\gamma(t) = (x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$.*

2.2. **Операторы дифференцирования в точке.** Пусть (U, φ) содержащая точку $p \in M$ карта гладкого многообразия M. Функционал $X = \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ на множестве гладких функций $\mathcal{F}(U)$ называется *дифференцированием в точке* $p \in M$, если он удовлетворяет условиям

$$X(f+g) = X(f) + X(g); \quad X(kf) = kX(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Множество всех дифференцирований в точке p будет обозначаться Diff_p.

Задача 2.4. *1) Докажите, что дифференцирование константы дает нуль.*

2)Докажите, что дифференцирования в точке $Diff_p$ образуют векторное пространство.

3) Пусть $F : U \to V$ — диффеоморфизм карт из атласов двух гладких многообразий. Он порождает порождает изоморфизм $F^* : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ между алгебрами гладких функций по формуле $f \mapsto fF$ (см. задачу 1.3). Докажите, что соответствие функционалов $X \to XF^*$ порождает изоморфизм векторных пространств $Diff_p \to Diff_{F(p)}$.

Наша ближайшая цель доказать, что касательное пространство T_p естественно изоморфно векторному пространству дифференцирований Diff_p.

Построим сначала отображение $\Phi = \Phi_p : T_p \to \mathrm{Diff}_p$. Для этого рассмотрим произвольный вектор $v \in T_p$, выберем представляющий его путь $\gamma : [0, 1] \to U$, где $\gamma(0) = p$, и сопоставим ему функционал

$$\Phi(v) = X_v : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad X_v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))(0)$$

Задача 2.5. *1) Докажите, что оператор X_v не зависит от выбора представляющего его пути γ и является дифференцированием в точке p.*

2) Докажите, что вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ из примера 2.1 отвечает дифференцирование $X_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(f) = \Phi(e_i)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 2.1. *Отображение $\Phi : T_p \to Diff_p$ является изоморфизмом векторных пространств.*

Proof. Докажем гомоморфность отображения Φ. Пусть γ^1 и γ^2 — пути, представляющие вектора v_1 и v_2. Рассмотрим карту (U, φ), где $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ и положим $\tilde{\gamma}^i = \varphi\gamma^i$, $\tilde{f} = (\varphi^{-1})^*$. Тогда

$$X_{v_1+v_2}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma^1(t)+\gamma^2(t))(0) = \frac{d}{dt}\tilde{f}(\tilde{\gamma}^1(t)+\tilde{\gamma}^2(t))(0) = \mathtt{grad} f(p)(\gamma^1(t)+\gamma^2(t))'(0) =$$

$$\mathtt{grad} f(p)(\gamma^1(t))'(0)+\mathtt{grad} f(p)(\gamma^2(t))'(0) = \frac{d}{dt} f(\gamma^1(t))(0)+\frac{d}{dt} f(\gamma^2(t))(0) = X_{v_1}(f)+X_{v_2}(f).$$

Свойство $X_{kv} = kX_v$ доказывается аналогично.

Построим теперь отображение Φ^{-1}. Отображение φ устанавливает изоморфизм между векторными касательными пространствами многообразия M в точке p и многообразия $\mathbb{R}^n$ в точке 0 (лемма 2.3). Это же отображение φ устанавливает изоморфизм между пространством дифференцирований многообразия M в точке p и пространством дифференцирований многообразия $\mathbb{R}^n$ в точке 0 (лемма 2.4). Более того, отображение φ переводит гомоморфизм $\Phi_p : T_p \to \mathrm{Diff}_p$ в гомоморфизм $\Phi_0 : T_0 \to \mathrm{Diff}_0$. Поэтому нам достаточно построить отображение Φ^{-1} для случая $(M, p) = (\mathbb{R}^n, 0)$.

Для произвольной гладкой функции $f(x) = f(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \subset \mathbb{R}^n$ формула Тейлора дает разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i + r_2(x),$$

где $r_2(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\theta x)x^i x^j = h_{ij}(x)x^i x^j$ — остаточный член в форме Лагранжа. Согласно свойствам оператора дифференцирования

$$X(f(0)) = 0 \quad \text{и} \quad X(h_{ij}(x)x^i x^j) = h_{ij}(X(x^i)0 + 0X(x^j)) = 0$$

Таким образом,

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)X(x^i).$$

Положим теперь

$$w = (w^1, \ldots, w^n) \text{ где } w^i = X(x^i).$$

Тогда $\Phi(w) = X$, поскольку

$$X_w(f) = \frac{d}{dt} f(wt)(0) = \mathtt{grad} f(0)(w^1, \ldots, w^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)X(x^i) = X(f).$$

□

2.3. **Координатное описание касательного вектора.** Введем важное обозначение, которое делает вычисления значительно менее громоздкими. Если в мономе встречаются 2 одинаковых индекса (например индекс i меняющийся от 1 до n), причем один из индексов сверху, а другой снизу, то такой моном означает сумму мономов такого типа во всем диапазоне изменения индекса. Например, $T^i x_i$ будет означать $\sum_{i=1}^n T^i x_i$.

Согласно примеру 2.1, векторные пространства $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ естественно изоморфны. Базисному вектору $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ отвечает при этом вектор, обозначаемый $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Далее мы будем отождествлять пространства $\mathbb{R}^n$ и $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, считая, что $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(x_0)$.

Рассмотрим в окрестности точки $p \in M$ карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\varphi(p) = x_0$. Согласно задаче 2.3, карта (U, φ) порождает естественный изоморфизм между T_pM и $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Карта (U, φ) позволяет, таким образом, сопоставить касательному вектору $v \in T_pM$ вектор $(T^1, \dots, T^n) = T^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x_0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Числа $(T^1, \dots, T^n)$ называются *координатами касательного вектора v в карте* (U, φ). Согласно задаче 2.5, вектору с координатами $(T^1, \dots, T^n)$ отвечает дифференцирование $f \mapsto T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ в точке x_0.

Посмотрим теперь, как меняются координаты касательного вектора при замене карты. Рассмотрим принадлежащие гладкому атласу и содержащие точку p карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi(p) = x_0$ и $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{x}_0$. В произвольной точке $q \in U \bigcap \tilde{U}$ эти отображения имеют вид $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))$ и $\tilde{\varphi}(q) = (\tilde{x}^1(q), \dots, \tilde{x}^n(q))$. Отображение перехода $\tilde{\varphi}\varphi^{-1} : \varphi(U \bigcap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \bigcap \tilde{U})$ является гладкой заменой координат $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$. Таким образом, согласно теоремам многомерного анализа,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x_0) = e_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0) e_j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}_0).$$

Рассмотрим теперь произвольный касательный вектор v. Пусть его координаты в карте (U, φ) равны $(T^1, \dots, T^n)$. Тогда

$$v = T^i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_0) = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{T}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x}_0), \quad \text{где} \quad \tilde{T}^j = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0).$$

Таким образом, координаты вектора v в карте $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ равны

$$\tilde{T}^j = T^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(x_0).$$

Это соотношение позволяет определить касательный вектор в точке $p \in M$, как операцию, сопоставляющую каждой карте (U, φ) вектор

$$(T^1, \dots, T^n) \in \mathbb{R}^n$$

таким образом, что при гладкой замене карты вида $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$ вектор $(T^1, \dots, T^n)$ переходит в вектор

$$(\tilde{T}^1, \dots, \tilde{T}^n) = (T^i \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}(x_0), \dots, T^i \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Это определение, несмотря на всю свою громоздкость, оказывается очень удобным при конкретных вычислениях.

2.4. **Дифференциал отображения.** В каждой точке $p \in M$ гладкое отображение $F : M \to N$ порождает линейное отображение касательных пространств $dF_p : T_p \to T_{F(p)}$, которое и называется *дифференциалом отображения* F *в точке* p. Мы определяли касательное пространства 3 разными способами. Проследим, как строится дифференциал при разных определениях касательного пространства.

Пусть мы определяем вектор $v \in T_p$ как класс эквивалентности путей из точки $p \in M$ и $\gamma : [0,1] \to M$ один из таких путей. Под действие F этот путь переходит в некоторый путь $(F\gamma) : [0,1] \to N$ с началом в точке $F(p)$.

Задача 2.6. *Докажите, что отображение* F *переводит эквивалентные пути в эквивалентные.*

Дифференциалом $dF_p : T_p \to T_{F(p)}$ называется отображение, сопоставляющее классу эквивалентности пути $\gamma : [0,1] \to M$ класс эквивалентности пути $(F\gamma) : [0,1] \to N$.

Если мы рассматриваем вектор касательного пространства как дифференцирование X в точке $p \in M$, то его образ под действием дифференциала dF_p — это дифференцирование $dF_p(X) : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ в точке $F(p) \in N$. Оно определяется равенством $(dF_p(X))(g) = X(gF)$ на функциях $g \in \mathcal{F}(V)$ определенных в окрестности $V = F(U)$ точки $F(p)$ (см. задачу 2.4 и теорему 2.1).

Выясним теперь как дифференциал отображения преобразует касательные векторы, определенные, как векторы $T \in \mathbb{R}^n$ и $\tilde{T} \in \mathbb{R}^m$, порожденные картами $(U, \varphi) \subset M$ и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \subset N$. Мы считаем, что $\tilde{U} = F(U)$ и $\varphi(p) = \tilde{\varphi}(F(p)) = 0$. Чтобы не усложнять обозначения мы отождествим U и $\tilde{U}$ с их образами под действием диффеоморфизмов φ и $\tilde{\varphi}$. То есть мы будем считать, что

$$U \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \dots, x^n)\},$$
$$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m = \{\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)\}.$$
$$p = F(p) = 0, \quad F(x) = (F^1(x), \dots, F^m(x)).$$

Для описания зависимости между T и $\tilde{T}$ мы используем дифференцирования в точке 0, порожденные этими векторами, и уже найденный закон преобразования дифференцирований при отображениях. Согласно нашим определениям, вектору $T = (T^1, \dots, T^n)$ отвечает дифференцирование в 0

$$T^i \frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R} \quad \text{такое, что} \quad T^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}(U).$$

Дифференциал dF_0 переводит это дифференцирование в дифференцирование

$$(dF_0(T^i \frac{\partial}{\partial x^i}))(\tilde{f}) = (T^i \frac{\partial}{\partial x^i})(\tilde{f} F) = T^i \frac{\partial(\tilde{f} F)}{\partial x^i}(0) \quad \text{функций} \quad \tilde{f} \in \mathcal{F}(\tilde{U}).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции находим что

$$T^i \frac{\partial(\tilde{f} F)}{\partial x^i}(0) = T^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = T^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) = \tilde{T}^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0),$$

где числа

$$\tilde{T}^j = T^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0)$$

являются по определению координатами вектора $dF_0(T^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ в карте $\tilde{U}$.

Таким образом,
$$\begin{pmatrix}\tilde{T}^1\\ \\ \tilde{T}^m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T^1\\ \\ T^n\end{pmatrix},$$
то есть $\tilde{T} = dF_0(T)$ где
$$dF_0 = \begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0)\end{pmatrix}$$
— это матрица Якоби дифференциала отображения $\tilde{\varphi}F\varphi^{-1}$ в точке 0.

Таким образом мы доказали, в частности, что *для гладкого отображения области $\mathbb{R}^m$ в область $\mathbb{R}^n$ определенный нами дифференциал отображения dF_p совпадает с дифференциалом отображения, определенным ранее в теории функций многих переменных.*

3. Гладкие отображения

3.1. **Регулярные точки отображения.** Рассмотрим гладкое отображение $F : M \to N$ гладких многообразий M и N. Точка $p_0 \in M$ называется *регулярной точкой отображения* F, если гомоморфизм $dF_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{F(p_0)}N$ является эпиморфизмом.

Из определения сразу следует, что регулярных точек не существует, если $\dim M \leq \dim N$. Более того, при $\dim M \geq \dim N$ точка регулярна, если и только, если ранг дифференциала в этой точке равен $\dim N$.

Задача 3.1. *Доказать что регулярные токи образуют открытое в M подмножество.*

Точка $q_0 \in N$ называется *регулярным значение отображения* F, если или $q_0 \in N \setminus F(M)$, или все точки прообраза $F^{-1}(q_0)$ являются регулярными точками отображения F.

Теорема 3.1. *Пусть $q_0 \in F(M)$ — регулярное значение гладкого отображения $F : M \to N$. Тогда $L = F^{-1}(q_0)$ гладкое многообразие размерности $\dim L = \dim M - \dim N$. Более того, координаты в окрестности $p_0 \in F^{-1}(q_0) \subset M$ можно выбрать таким образом, чтобы часть из них образовывала координаты на L.*

Proof. Пусть $F(p_0) = q_0$. Рассмотрим на M и N карты (U, φ) и (V, ψ) такие, что $\varphi(p_0) = \psi(q_0) = 0$ и U состоит из регулярных точек отображения F. Диффеоморфизмы φ и ψ переносят на U и V координаты из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ (где $m = \dim M$ и $n = \dim N$) то есть, задают в окрестностях точек p_0 и q_0 координаты $(x^1, \dots, x^m)$ и $(y^1, \dots, y^n)$.

В этих координатах отображение F запишется в виде отображения
$$f = (f^1, \dots, f^n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$
Содержащая точку $p_0 = 0$ компонента связности $f^{-1}(0)$ множества $L = F^{-1}(q_0)$ описывается уравнением $f(0) = 0$. Следовательно, L — это множество уровня

гладкого отображения. Таким образом, утверждение о гладкости многообразия L и свойствах координат следует из теоремы 1.2 и конструкции локальных карт, приведенной схеме доказательства теоремы. $\square$

3.2. **Теорема Сарда о критических значениях.** В этом разделе мы докажем важную теорему, доказанную американским математиком А.Сардом в 1942 году.

Перенесем сначала определение множеств (лебеговой) меры 0 с подмножеств в $\mathbb{R}^n$ на подмножества гладкого n-мерного многообразия N. По определению, мы говорим, что *подмножество* $L \subset N$ *имеет меру* 0, если для любой карты (U, φ) многообразия N множество $\varphi(L \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет n-мерную лебегову меру 0.

Следующая задача доказывает что в определение подмножества L меры 0 свойство "множество $\varphi(L \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0" достаточно проверить для одного семейства карт, покрывающих подмножество L.

Задача 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, регулярное во всех точках множества $L \subset U$ меры 0. Тогда $f(L)$ тоже имеет меру 0.*

Не регулярная точка гладкого отображения $f : M \to N$ называется критической. Другими словами, точка $x \in M$ называется *критической*, если дифференциал $df_x : T_x \to T_{f(x)}$ имеет ранг меньший $\dim N$. Образ $f(x)$ критической точки называется *критическим значением.*

Теорема 3.2. *(А.Сард) Множество критических значений гладкого отображения имеет меру 0.*

Используя сепарабельность, покроем многообразия M и N счетным семейством гладких карт. Теорема Сарда сводится теперь к следующему утверждению:

Теорема 3.3. *Рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ и гладкое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$. Тогда множество его критических значений имеет меру нуль.*

Утверждение теоремы очевидно при $n = 0$. Так что далее мы считаем, что $n > 0$. Доказательство будет вестись индукцией по m. При $m = 0$ утверждение очевидно. Докажем утверждение теоремы для $0 < m = K$, считая что для $m < K$ утверждение уже доказано.

Рассмотрим множество критических точек $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$ отображения $f(x) = (f^1(x), \ldots f^n(x))$. Нам надо доказать, что множество $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0.

Обозначим через C_k множество таких точек $x \in U$, где все частные производные отображения f порядка $\leqslant k$ равны 0. Множества C_k образуют последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots.$$

Кроме того,

$$C = (C \supset C_1) \cup (C_1 \supset C_2) \cup \ldots \cup (C_{k-1} \supset C_k) \cup C_k.$$

Поэтому доказательство теоремы 3.3 следует из следующих трёх лемм

Лемма 3.1. *Образ $f(C \backslash C_1)$ имеет меру нуль.*

Лемма 3.2. *Образ $f(C_k \backslash C_{k+1})$ имеет меру нуль при $k \geqslant 1$.*

Лемма 3.3. *Множество $f(C_k)$ имеет меру нуль при $k > \frac{m}{n} - 1$.*

Proof. леммы 3.1. Для $n = 1$ лемма верна, поскольку в этом случае $C = C_1$. Далее $n > 1$. Идея доказательства состоит в представлении множества B критических значений отображения f от m переменных виде семейства $B = \bigcup(t, B_t)$, где B_t — критические значения вспомогательного отображения g_t от $m-1$ переменных.

Сначала, заменой переменных в f, в малой окрестности произвольной точки $x_0 \in C \setminus C_1$ мы построим вспомогательное отображение g от m переменных с тем же множеством критических значений.

В точке $x_0 \in C \setminus C_1$ одна из частных производных, например $\partial f^1/\partial x^1$, не равна 0. Рассмотрим отображение

$$h : U \to \mathbb{R}^m, \quad \text{где} \quad h(x) = (f^1(x), x^2, ..., x^m).$$

В точке x_0 дифференциал dh_{x_0} описывается невырожденной матрицей Якоби.

$$\begin{pmatrix} \partial f^1/\partial x^1 & * & & \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество $V' = h(V) \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим замену переменных

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to V \to \mathbb{R}^n.$$

Множество критических значений любого отображение не меняется при диффеоморфных заменах переменных. Поэтому множество критических значений отображения g совпадает с множеством $B = f(V \cap C)$ критических значений отображения f.

С другой стороны, для $t = f^1(x)$,

$$g(t, x^2, ..., x^m) = f \circ h^{-1}(t, x^2, ..., x^m) = f(x^1, x^2, ..., x^m) = (t, f^2(x), ..., f^m(x)).$$

Таким образом,

$$g(t, x^2, ..., x^m) = (t, g_t(x^2, ..., x^m)) \quad \text{где} \quad g_t : V' \bigcap \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$

Матрица Якоби отображения $g(t, x^2, ..., x^m)$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \{\partial g_t^i/\partial x^j\} \end{pmatrix}.$$

Поэтому множество критических точек отображения $g(t, x^2, ..., x^m)$ совпадает с $\bigcup\limits_t(t, C_t)$, где C_t — множество критических точек отображения $g_t(x^2, ..., x^m)$. Таким образом, множество B критических значений отображения g является объединением

$$B = \bigcup_t f(t, C_t) = \bigcup_t (t, B_t),$$

где $B_t = g_t(C_t)$ множеств критических значений отображений g_t.

Согласно предположению индукции, $n-1$ мера множества B_t критических значений гладкого отображения $g_t(x^2, ..., x^m)$ равна 0. Согласно хорошо известной теоремы теории меры [1] отсюда следует, что n-мера и самого множества критический значений $f(V \cap C) = B = \bigcup_t (t, B_t)$ также равна 0.

В виду сепарабельности многообразия M, множество $C \backslash C_1$ покрывается счетным числом окрестностей V нужного нам типа и, следовательно, мера $f(C \backslash C_1)$ также равна 0. $\square$

Proof. леммы 3.2. Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 3.1. Для доказательства мы строим отображение g_0 от $m-1$ переменной, критические значения которой совпадают с критическими значениями f.

Для каждого $x_0 \in C_k \backslash C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я частная производная отображения f, например $\partial^{k+1} f^1 / \partial x_1 \partial x_{s_2} ... \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке x_0. Рассмотрим отображение

$$w(x) = \partial^k f^1 / \partial x^{s_2} ... \partial x^{s_{k+1}}.$$

Тогда $w(x_0) = 0$ (поскольку $x_0 \in C_k$), но $\partial w / \partial x^1 (x_0) \neq 0$ (поскольку $\partial^{k+1} f^1 / \partial x_1 \partial x_{s_2} ... \partial x_{s_{k+1}} (x_0) \neq 0$).

Рассмотрим отображение

$$h : U \to \mathbb{R}^m, \quad \text{где} \quad h(x) = (w(x), x^2, ..., x^m).$$

В точке x_0, дифференциал dh_{x_0} описывается невырожденной матрицей Якоби.

$$\begin{pmatrix} \partial w / \partial x^1 & * & & \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество $V' = h(V) \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим замену переменных

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to V \to R^n$$

и его ограничение

$$g_0 = g\big|_{(0 \times R^{m-1})} : (0 \times R^{m-1}) \cap V' \to R^n.$$

Если $x \in C_k$, то $h(x) = (w(x), x^2, ..., x^m) = (0, x^2, ..., x^m)$, откуда

$$f(C_k \cap V) = gh(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V).$$

Все производные g_0 порядка $\leqslant k$ равны нулю на $h(C_k \cap V)$б в виду $f = g_0 h$. Поэтому, в виду $k \geq 1$, все точки множества $g_0 h(C_k \cap V)$ являются критическими значениями отображения g_0. С другой стороны, отображение g_0 зависит от $m-1$ переменных, и следовательно, по предположению индукции, мера множества $f(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V)$ равна 0 в R^n.

Покрывая $C_k \backslash C_{k+i}$ счетным числом таких окрестностей V получаем утверждение леммы. $\square$

[1] С.М.Натанзон "Краткий курс математического анализа" МЦНМО, М., 2008, Часть 2 Теорема 15.1.

Proof. леммы 3.3. Рассмотрим $k > \frac{m}{n} - 1$. Обозначим через $I(x,\delta)$ замкнутый куб с центром x и ребром δ.

Рассмотрим $x \in C_k$. Все частные производные отображения f порядка меньше $k+1$ равны 0 в точке x. Следовательно, по формуле Тейлора, существует $\delta > 0$ такое, что

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + R(x,h), \quad \| R(x,h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1},$$

для всех $x \in C_k \cap I(x,\delta)$ и $x+h \in I(x,\delta)$.

Положим $I = I(x,\delta)$ и докажем, что мера множества $f(C_k \cap I)$ равна 0. Разделим I на r^m кубиков с ребром δ/r. Пусть I_y - содержащий точку $y \in C_k \cap I$ кубик этого разбиения. Тогда любая точка куба I_y может быть записана в виде

$$y + h \quad \text{где} \quad \| h \| \leqslant \sqrt{m}(\delta/r).$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_y) \subset \mathbb{R}^n$ лежит в кубе с центром в точке $f(y)$ и ребром

$$c \| h \|^{k+1} \leqslant c(\sqrt{m}(\delta/r))^{k+1} = a/r^{k+1}, \quad \text{где} \quad a = c(\sqrt{m}\ \delta)^{k+1}.$$

Следовательно, объем множества $f(I_y)$ не превышает $a^n/r^{(k+1)n}$.

Таким образом, множество $f(C^k \cap I)$ содержится в объединении r^m кубиков общим объемом

$$V \leqslant r^m a^n / r^{(k+1)n} = a^n r^{m-(k+1)n} = a^n r^{m-(\alpha+\frac{m}{n})n} \leq a^n r^{-\alpha n}, \quad \text{где} \quad \alpha = k+1-\frac{m}{n} > 0.$$

Объем V стремится к 0 при $r \to \infty$. Следовательно, множество $f(C_k \cap I)$ имеет меру нуль. Покрывая C_k счетным числом таких кубиков I находим, что мера множества $f(C_k)$ тоже равно 0. □

Вот первые следствия теоремы Сарда.

Следствие 3.1. *Если $F : M \to N$ гладкое отображение и $\dim M < \dim N$, то $N \setminus F(M) \neq \emptyset$*

Задача 3.3. *Множество регулярных значений гладкого отображения $F : M \to N$ открыто и всюду плотно в N.*

3.3. **Теорема Уитни о вложении многобразий.** Рассмотрим гладкие многобразия M и N размерностей m и n. Гладкое отображение $f : M \to N$ называется *погружением*, если ранг отображения $df\ |_x \colon T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен m. Это означает, что линейное отображение $df\ |_x$ касательных пространств является мономорфизмом для всех $x \in M$. Отсюда следует, в частности, что $m \leq n$. Используя теорему об обратных отображениях находим, что в этом случае f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и окрестностью её образа $f(U(x))$ в многобразии N. Однако, "в целом" отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение $f : M \to N$ будем называть *вложением*, если f устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$.

Задача 3.4. *Найдите гладкое отображение $f : M \to N$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$, но не является погружением.*

Нам понадобиться следующая несложная задача, известная вам из курса анализа.

Задача 3.5. *Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}^m$ — гомеоморфные $\mathbb{R}^m$ открытые множества, такие, что замыкание $\bar{A}$ лежит в B. Тогда существует гладкое отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такая что $f(A) = 1$, $0 < f(B \setminus A) < 1$ и $f(\mathbb{R}^m \setminus B) = 0$*

Теорема 3.4. *Любое компактное гладкое многообразие M может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N.*

Proof. Рассмотрим конечный набор из k карт $\{(U_i, \varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^m)\}$ покрывающий многообразии M. Рассмотрим открытое покрытие $\{V_i | i = 1, \dots, k\}$, вписанное в покрытие $\{U_i | i = 1, \dots, k\}$, то есть такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ и $\bigcup\limits_i V_i = M$.

Рассмотрим гладкую функцию $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, равную 1 на V_i и 0 вне U_i (см. задачу 3.5). Продолжим функции $\varphi_i^j|_{V_i}$ до гладких функций $\psi_i^j : M \to \mathbb{R}$, где $\psi_i^j(x) = f_i(x)\varphi_i^j(x)$ при $x \in U_i$ и $\psi_i^j(x) = 0$ при $x \in M \setminus U_i$.

Докажем теперь, что набор функций $\{\psi_i^j(1 = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m), f_i(1 = 1, \dots, k)\}$ задает вложение $F : M \to \mathbb{R}^{km+k}$. Любая точка $x \in M$ принадлежит некоторой области V_i. В этом случае ранг дифференциала отображения $(\psi_i^1, \dots, \psi_i^m)$ в точке x равен равен рангу отображения φ_i и, следовательно равен m. С другой стороны, функции $\psi_i^1, \dots, \psi_i^m$ — это часть координат отображения F. Следовательно ранг F в произвольной точке x не меньше m. С другой стороны этот ранг не больше m, поскольку $\dim M = m$. Следовательно ранг отображения F равен m в каждой точке $x \in M$ и F — погружение.

Докажем, что F переводит разные точки в разные точки. Пусть $x \neq y$ и $x \in V_i$. Тогда $f_i(x) = 1$. Если $f_i(y) \neq 1$, то $F(x) \neq F(y)$, поскольку f_i — это одна из координат отображения F. Если $f_i(y) = 1$, то $y \in V_i$, и значит $\psi_i(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) = \psi_i(y)$. Следовательно, $F(x) \neq F(y)$. □

Найдем теперь оценку для минимальной размерности векторного пространства, куда можно вложить гладкое многообразие размерности m.

Теорема 3.5. *(Уитни) Любое гладкое компактное m-мерное гладкое многообразие M можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2m}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Proof. Рассмотрим любое гладкое вложение $\varphi : M \to R^N$, существующее согласно теореме 3.4. Чтобы не загромождать обозначения мы будем обозначать образ $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^N$ той же буквой M. Докажем, что при $N > 2m$ существует проекция $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}^N$ такая, что $\pi|_M$ — погружение.

Касательное пространство T_xM к многообразию M в точке $x \in M \subset \mathbb{R}^N$ естественно отождествляется с плоскостью $T_x \subset \mathbb{R}^N$ касающейся многообразия M в точке x. Эта точка является также нулем касательного пространства T_x (см. начало раздела "Касательные векторы").

Обозначим через Q множество пар (x, ℓ), где $x \in M$ и ℓ — проходящая через x прямая в касательном пространстве T_x. Каждой прямой ℓ отвечает параллельная ей и проходящая через $0 \in \mathbb{R}^N$ прямая в $\mathbb{R}^N$. Эта прямая является точкой проективного пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$. Постороенное соответствие порождает отображение

$$\alpha : Q \to \mathbb{R}P^{N-1}.$$

Задача 3.6. *Докажите, что Q — гладкое многообразие размерности $2m - 1$ и α — гладкое отображение.*

Согласно задаче 3.6 и следствию 3.1 дополнение $\mathbb{R}P^{N-1} \setminus \alpha(Q)$ не пусто. Рассмотрим прямую $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus \alpha(Q)$. Образ $\alpha(Q)$ состоит из прямых в $\mathbb{R}^N$, параллельных одной прямой из T_x для хотя бы одной точки $x \in M$. Таким образом, для любого $x \in M$ касательное пространство T_x не содержит прямых параллельных ℓ_0.

Рассмотрим теперь ортогональную ℓ_0 и проходящую через 0 гиперплоскость $L \subseteq \mathbb{R}^N$. Рассмотрим ортогональную проекцию $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на эту гиперплоскость и её ограничение $\tilde{\pi} = \pi\big|_M : M \to L$.

Дифференциал $d\tilde{\pi}_x : T_x \to T_{\tilde{\pi}(x)} = L$ в точке $x \in M$ — это ортогональная проекция плоскости T_x на L. Его ядро состоит из векторов ортогональных L и, следовательно, параллельных ℓ_0. Таким образом ядро дифференциала $d\tilde{\pi}_x$ нулевое для любого $x \in M$. Следовательно, $\tilde{\pi} = \pi\big|_M : M \to L = \mathbb{R}^{N-1}$ — погружение.

Мы доказали, что, если $N > 2m$, то существует направление $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1}$ проектирование по которому является погружением в пространство $\mathbb{R}^{N-1}$. Если $N - 1 > 2m$, то, повторяя рассуждения, мы находим погружение многообразия M в $\mathbb{R}^{N-2}$. Продолжая этот процесс мы находим погружение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{2m}$.

Докажем теперь, что при $N > 2m + 1$ существует ортогональная проекция на гиперплоскость $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ такая, что $\pi|_M$ — вложение.

Рассмотрим множество пар $G = \{(x, y) \in M \times M | x \neq y\}$. Рассмотрим отображения

$$\beta : G \to \mathbb{R}P^{N-1},$$

которое сопоставляет паре $(x, y) \in G$ прямую $\beta(x, y) \subset \mathbb{R}P^{N-1}$, параллельную прямой проходящую через точки x, y.

Пусть $\ell \in \mathbb{R}^{N-1}$ и $\pi_\ell : \mathbb{R}^N \to L$ — ортогональная проекция на ортогональную ℓ гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1} \cong L \subset \mathbb{R}^N$. Направление $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ назовем *запрещенным*, если существуют $x \neq y \in M$ такие, что $\pi_\ell(x) = \pi_\ell(y)$. Тогда множество запрещенных направлений совпадает с образом $\beta(G)$.

Задача 3.7. *Докажите, что G — гладкое многообразие размерности $2m$ и β — гладкое отображение.*

Размерность многообразия G равна $2m$. Следовательно, при $2m < N - 1$ все точки множества G являются критическими для отображения β. В этом случае, согласно теореме Сарда, множество $\beta(G)$, как и $\alpha(Q)$ имеет меру 0 в $\mathbb{R}P^{N-1}$ и, значит, их дополнение не пусто. Ортогональное проектирование вдоль прямой $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus (\alpha(Q) \cup \beta(G))$ является погружением, не склеивающим точки, то есть вложением в $L \cong \mathbb{R}^{N-1}$.

Итак мы доказали, при $N - 1 > 2m$ существует вложение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{N-1}$. Проделав такое проектирование достаточное число раз получаем вложение многообразия M в пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$. $\square$

Замечание 3.1. *Известна более сложная теорема (мы ее не доказываем), что любое n-мерное многообразие M можно гладко вложить $\mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка уже неулучшаема.*

4. Векторные расслоения

4.1. **Определения и примеры.** Язык векторных расслоений — это универсальный язык современной математики. Он был разработан во второй половине 20 века в работах Ж.Лере, Р. Годемана и др. Это язык удобен для описания отображений, где множество возможных значений точки не постоянено (как в случае обычных отображений $F : M \to N$), а меняется от точки к токе (т.е. $F(x) \in N(x)$). Перейдем к формальным определениям.

Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *вещественным локально тривиальным векторным расслоением ранга* r, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) для каждой точки $p \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$ и такое гладкое отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *(локальной) тривиализацией*, что $h(E_p) = p \times \mathbb{R}^r$ и отображение $h|_{E_p} : E_p \to p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $p \in U$.

Многообразия E и X называются соответственно *(тотальным) пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткость опускать слова "вещественное локально тривиальное".

Векторное расслоение ранга r можно представлять себе как семейство r-мерных векторных пространств E_p, параметризованных точками базы $p \in X$, которое в окрестности каждой точки базы представлено в виде $U \times \mathbb{R}^r$

Пример 4.1. *Тривиальное расслоение* $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.

Пример 4.2. *Касательное расслоение* $\pi : E \to X$, *где* $E_p = T_p$.

Пример 4.3. *Универсальное расслоение над грассмановым многообразием. (Вещественным) грассмановым многообразием* $\mathbb{R}G_{r,n}$ *называется множество всех* r*-мерных подпространств векторного пространства* $\mathbb{R}^n$. *Универсальным расслоением называется расслоение* $\pi_{r,n} : E \to \mathbb{R}G_{r,n}$ *ранга* r*, слой которого* E_p *над точкой* $p \in \mathbb{R}G_{r,n}$ *совпадает с подпространством в* $\mathbb{R}^n$*, представляющим точку* p. *Расслоение называется "универсальным", потому что в расслоение такого типа "вкладывается" любое другое расслоение* [2].

Рассмотрим пару тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ и точку $p \in U_\alpha \bigcap U_\beta$. Тривиализации h_α и h_β порождают отображение $h_\beta h_\alpha^{-1} : p \times \mathbb{R}^r \to p \times \mathbb{R}^r$, действующее на втором сомножителе как отображение векторных пространств. Этот автоморфизм, как и любой автоморфизм арифметического пространства $\mathbb{R}^r$, описывается матрицей $g_{\alpha\beta}(p) \in GL(r, \mathbb{R})$, то есть $h_\beta h_\alpha^{-1} : p \times v \to p \times g_{\alpha\beta}(p)v$.

Таким образом мы построили отображение $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$, которое называется *функцией перехода между локальными тривиализациями* α *и* β.

Задача 4.1. *Постройте системы локальных тривиализаций для касательного и универсального расслоений и найдите функции перехода между этими тривиализациями.*

[2] С.М.Натанзон "Введение в пучки, расслоения и классы Черна" МЦНМО, М., 2010, Теорема 8.1

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Upsilon\}$ *открытое покрытие гладкого многообразия* X. *Тогда семейство гладких отображений*

$$\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$$

является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения $\pi : E \to X$, *если и только если*

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{на} \quad U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon.$$

Proof. Соотношения $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода между тривиализациями векторного расслоения означают, что тождественное преобразование векторного пространства описывается единичной матрицей.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений

$$\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$$

такое, что $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Тогда $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Рассмотрим множество $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} (U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$. Точки $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать *родственными*, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Отношение родственности является отношением эквивалентности: рефлексивность следует из $g_{\alpha\alpha} = 1$, симметричность из $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ и транзитивность из $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.

Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает множество E. Отображения $(p, v) \mapsto p$ порождают векторное расслоение $\pi : E \to X$, где $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и функции перехода совпадают с $g_{\alpha\beta}$. □

Использую лемму 4.1, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее условиям леммы 4.1.

Морфизмом векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X \pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения φ_E на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является гомоморфизмом в $\tilde{E}|_{\varphi_X(p)} = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_X(p))$. Как обычно, обратимый морфизм в классе морфизмов расслоений называется *изоморфизмом расслоений.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

Особую роль играют морфизмы пучков с общей базой, то есть морфизмы, где $\widetilde{X} = X$ и φ_X — тождественное отображение. Множество таких морфизмов обозначается $Hom(E, \widetilde{E})$. Изоморфизм φ_E для таких расслоений называется *эквивалентностью расслоений.*

Задача 4.2. *Доказать, что семейства переходных функций* $\{g_{\alpha,\beta}\}$ *и* $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ *на гладком многообразии* $(X\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$, *задают эквивалентные расслоения, если и только, если существует семейство гладких отображений* $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ *такое, что* $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\beta g_{\alpha,\beta} l_\alpha^{-1}$.

4.2. **Сечения расслоений.** *Сечением векторного расслоения* $\pi : E \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется гладкое отображение $s : U \to E$ такое что πs — тождественное отображение. Таким образом, сечение сопоставляет каждой точке $p \in U$ вектор из E_p.

Множество сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ расслоения π над подмножеством $U \subset X$ образуют векторное пространство. Более того, мы можем поточечно умножить сечение на гладкую функцию, получая при этом сечение того же расслоения. Это задаёт на множестве сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ структуру модуля над алгеброй $\mathcal{F}(U)$ гладких функций на U.

Набор сечений $\{s_1, \dots, s_r\} \subset \mathcal{F}_\pi(U)$ назовем *базисным* набором сечений, если вектора $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ образуют базис векторного пространства E_p при каждом $p \in U$. В этом случае произвольное сечение имеет вид $f^i(p)s_i(p)$, где $\{f^i(p)\} \subset \mathcal{F}(U)$ — гладкие функции на U.

Арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^r$ имеет выделенный базис $\{e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) | i = 1, \dots, r\}$. Векторам базиса отвечают сечения $e_i(p) = p \times e_i$ тривиального расслоения $U \times \mathbb{R}^r \to U$, образующие базисный набор сечений. Тривиализации $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ переводит его в базисный набор сечений $s_i(p) = h^{-1}(e_i(p))$ расслоения π над U.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{R}^r \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_U} & & \Big\downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

Наоборот, базисный набор сечений $\{s_i(p) | i = 1, \dots, r\}$ расслоения π над U порождает тривиализацию $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, где $h(\xi^i s_i(p)) = p \times \xi^i e_i$.

Таким образом аксиому 2) о локальной тривиализации из определения векторного расслоения можно заменить на

2') для каждой точки $p \in X$ существует такая окрестность $U \subset X$,допускающая базисный набор сечений расслоения π над U.

Сечение тривиального расслоения $\pi : E \to X \times \mathbb{R}^r$ порождают вектор-функцию $s : X \to \mathbb{R}^r$. Сечение произвольного расслоения — это аналог вектор-функции, где каждая точка отображается в собственное векторное пространство. Далее мы увидим, что такие отображения играют центральную роль в теории многообразий.

4.3. **Операции над расслоениями.** Векторные расслоения $\pi : E \to X$ можно рассматривать как специальные семейства $\{E_p | p \in X\}$ векторных пространств. Такой подход позволяет переносить на векторные расслоения операции над векторными пространствами.

Сопряжение расслоений.

Рассмотрим (локально тривиальное) векторное расслоение $\pi : E \to X$. Заменим каждый слой E_p на сопряженное пространство E_p^*. Каждому базису $\{s_i | i = 1, \dots, r\}$ пространства векторного E_p отвечает сопряженный базис $\{s_j^* | j = 1, \dots, r\}$ сопряженного пространства E_p^*, где $s_i^*(s_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим объединение

$$E^* = \bigcup_p E_p^*$$

и отображение $\pi^* : E^* \to X$, где $\pi^*(E^*_p) = p$. Докажем, что $\pi^* : E^* \to X$ — локально тривиальное векторное расслоение. Для этого достаточно проверить, что каждая точка $p \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ над которой существует базисный набор сечений расслоения π^* (аксиома 2' для π^*). Сопоставим произвольной точке $p \in X$ окрестность $U \subset X$ над которой существует базисный набор сечений $\{s_i(p)|i = 1, \ldots, r\}$ расслоения π (аксиома 2' π). Тогда $\{s^*_i(p)|i = 1, \ldots, r\}$ образуют базисный набор сечений расслоения π^* над U.

Таким образом отображение $\pi^* : E^* \to X$ является локально тривиальным расслоением. Оно называется *расслоением, сопряженным к* $\pi : E \to X$.

Задача 4.3. *Пусть $g_{\alpha\beta}$ функция перехода между локальными тривиализациями h_α и h_β расслоения $\pi : E \to X$. Пусть $g^*_{\alpha\beta}$ функция перехода между соответствующими локальными тривиализациями h^*_α и h^*_β сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Докажите, что матрицы $g_{\alpha\beta}$ и $g^*_{\beta\alpha}$ сопряжены. Докажите прямым вычислением, что матрицы $g^*_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.*

Тензорное произведение расслоений.

Напомним, что базисы $\{s^t_i|i = 1, \ldots, r^t\}$ векторных пространств V^t $(t = 1, \ldots, n)$ порождают базис

$$\{s^1_{i^1} \otimes \cdots \otimes s^n_{i^n}|i^t = 1, \ldots, r^t; t = 1, \ldots, n\}$$

векторного пространства $V = V^1 \otimes \cdots \otimes V^n$.

Определим тензорное произведение

$$\pi : E \to X,$$

расслоений

$$\pi^t : E^t \to X, \quad (t = 1, \ldots, n).$$

Слои расслоения π определяются как тензорные произведения $E_p = E^1_p \otimes \cdots \otimes E^n_p$ слоев E^t_p расслоений π^t. Тотальное пространство имеет вид $E = \bigcup\limits_p E_p$. Соответствие $E_p \mapsto p$ задает проекцию $\pi : E \to X$.

Докажем, что π — локально тривиальное векторное расслоение. Переходя к пересечениям тривиализаций можно считать, что каждая точка $p \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ над которой существует базисное семейство сечений

$$\{s^t_i(p)|i = 1, \ldots, r^t\}$$

расслоения π^t для каждого $i = 1, \ldots, n$ (аксиома 2' для π^t). Но тогда

$$\{s^1_{i_1}(p) \otimes \cdots \otimes s^n_{i_n}(p)|i_t = 1, \ldots, r_t; t = 1, \ldots, n\}$$

— это базисный набор сечений отображения $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$ и, следовательно π удовлетворяет аксиоме 2'.

Таким образом отображение $\pi : E \to X$ является локально тривиальным векторным расслоением. Оно называется *тензорным произведением расслоений* $\pi^1, \ldots, \pi^n$ и обозначается $\pi = \pi^1 \otimes \cdots \otimes \pi^n$.

Найдем переходные функции $g_{\alpha\beta}$ этого расслоения. Рассмотрим базисные наборы сечений $(s^t_\alpha)_{i^t}$ и $(s^t_\beta)_{j^t}$ $(i^t, j^t = 1, \ldots, r^t)$ порожденный локальными тривиализациями

$\pi^t_{U_\alpha} : (\pi^t)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ и $\pi^t_{U_\beta} : (\pi^t)^{-1}(U_\beta) \to U_\beta$ $(t = 1, \dots, n)$. Рассмотрим переходные функции $(g^t_{\alpha\beta})^{i^t}_{j^t}$ и между этими локальными тривиализациями. Тогда

$$(s^t_\beta)_{j^t} = (g^t_{\alpha\beta})^{i^t}_{j^t}(s^t_\alpha)_{i^t},$$

где $t = 1, \dots, n$; $i^t, j^t = 1, \dots, r^t$.

Следовательно,

$$(s^1_\beta)_{j^1} \otimes \dots \otimes (s^n_\beta)_{j^n} = (g^1_{\alpha\beta})^{i^1}_{j^1} \dots (g^n_{\alpha\beta})^{i^n}_{j^n}(s^1_\alpha)_{i^1} \otimes \dots \otimes (s^n_\alpha)_{i^n}.$$

Таким образом, нужная нам переходная функция имеет вид

$$(g_{\alpha\beta})^{i^1 \dots i^n}_{j^1 \dots j^n} = (g^1_{\alpha\beta})^{i^1}_{j^1} \dots (g^n_{\alpha\beta})^{i^n}_{j^n}.$$

Задача 4.4. *Докажите прямым вычислением, что функции перехода тензорного произведения расслоений удовлетворяют условиям леммы 4.1*

Тензорное умножение произвольных сечений $a^{i_t}_1 s^t_{i^t}$ тривиализаций

$$h^t : (\pi^t)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{r^t}$$

определяется через тензорные произведения в слоях, то есть формулой

$$a^{i_1}_1 s^1_{i_1} \otimes \dots \otimes a^{i_n}_n s^n_{i_n} = a^{i_1}_1 \dots a^{i_n}_n s^1_{i_1} \otimes \dots \otimes s^n_{i_n} \in \mathcal{F}_\pi(U).$$

Задача 4.5. *Докажите, что тензорное умножение сечений не зависит от выбора тривиализации и, следовательно, порождает гомоморфизм векторных пространств* $\mathcal{F}_{\pi_1}(X) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\pi_n}(X) \to \mathcal{F}_\pi(X)$.

Задача 4.6. *Определите прямые суммы расслоений и исследуйте их свойства.*

Особый интерес представляют тензорные степени расслоений $\pi^{\otimes n} = \pi \otimes \dots \otimes \pi$ и пространств их сечений $\mathcal{F}^{\otimes n}_\pi(X)$. В этом случае $\pi^{\otimes n_1} \otimes \pi^{\otimes n_2} = \pi^{\otimes (n_1+n_2)}$ и

$$\mathcal{F}^{\otimes n_1}_\pi(X) \otimes \mathcal{F}^{\otimes n_2}_\pi(X) \to \mathcal{F}^{\otimes (n_1+n_2)}_\pi(X).$$

Задача 4.7. *Докажите, что операции $\oplus$ и $\otimes$ наделяют множество $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{\otimes n}_\pi(X)$ структурой градуированной алгебры над кольцом гладких функций.*

4.4. **Внешние степени расслоений.** Напомним определение внешней степени $V^{\wedge n}$ векторного пространства V размерности r. Внешнее произведение векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ — это

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes v_{i_{\sigma(n)}},$$

где S_n группу перестановок чисел $\{1, \dots, n\}$ и $|\sigma|$ — четность перестановки $\sigma \in S_n$. В частности,

$$v_{i_{\chi(1)}} \wedge \dots \wedge v_{i_{\chi(n)}} = (-1)^{|\chi|} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}.$$

для любой перестановки $\chi \in S_n$ и $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n} = 0$, если среди векторов $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ есть совпадающие.

Обозначим через $V^{\wedge n} \subset V^{\otimes n}$ векторное пространство, порожденное тензорами вида $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_n}$. Его размерность $\dim V^{\wedge n}$ равна равна 0 при $n > r$ и $\frac{r!}{n!(r-n)!}$ при $n \le r$.

Базис $\{e_i | i = 1, \dots, r\}$ пространства V порождает базис

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} | i_1 < \dots < i_n\}$$

пространства $V^{\wedge n}$. Замена базиса $\tilde{e}_j = g^i_j e_i$ приводит к замене базиса $V^{\wedge n}$

$$\tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_n} = \hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \quad (i_1 < \dots < i_n;\ j_1 < \dots < æ_n), \tag{2}$$

где $\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} = \sum\limits_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{j_{\chi(1)}} \dots g^{i_n}_{j_{\chi(n)}}$.

Задача 4.8. *Докажите, что пространство $(V^{\wedge n})^*$ естественно изоморфно пространству кососимметрических полилинейных форм на V. Докажите, что $(V^{\wedge n})^* = (V^*)^{\wedge n}$.*

Подрасслоением расслоения $\pi : E \to X$ называется совокупность векторных подпространств $\hat{E}_p \subset E_x$, $\hat{E} = \bigcup\limits_{p \in X} \hat{E}_p$, такая, что $\pi|_{\hat{E}} : \hat{E} \to X$ — векторное расслоение.

Определим *внешнюю n-тую степень расслоения* $\pi : E \to X$ как подрасслоение

$$\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$$

его тензорной степени $\pi^{\otimes n} : E^{\otimes n} \to X$. Слоями расслоения $\pi^{\wedge n}$ являются векторные пространства $(E_p)^{\wedge n}$ и $E^{\wedge n} = \bigcup\limits_{p \in X} (E_p)^{\wedge n}$.

Стандартный базис $\{e_1, \dots, e_r\}$ пространства $\mathbb{R}^r$ порождает набор базисных сечений $\{e_1, \dots, e_r\}$ над U тривиализации расслоения $\pi : E \to X$. Внешние произведения этих сечений $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} | i_1 < \dots < i_n\}$ образуют базисный набор сечений и, следовательно, тривиализацию расслоения $\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$ над U.

Согласно соотношению (2), переходные функции

$$\tilde{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{j_n} = \hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

тривиализаций расслоения $\pi^{\wedge n}$ выражаются через переходные функции $\tilde{e}_j = g^i_j e_i$ тривиализаций расслоения π по формулам

$$\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} g^{i_1}_{j_{\sigma(1)}} \dots g^{i_n}_{j_{\sigma(n)}}.$$

Задача 4.9. *Докажите, что матричнозначные функции $\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_n}$ удовлетворяют условиям леммы 4.1.*

5. Тензорные поля и формула Стокса

5.1. **Тензорные расслоения.** *Касательным расслоением* гладкого многообразия X называется локально тривиальное векторное расслоение

$$\pi : TX \to X,$$

слоем которого $(TX)_p$ над каждой точкой $p \in X$ является касательное пространство T_pX в этой точке.

Согласно разделу 2.3, локальная карта многообразия $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ порождает базисный набор сечений

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(i = 1, \dots, r)$$

над U и, следовательно, локальную тривиализацию. Напомним эту конструкцию.

Рассмотрим образ

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^r(p)) \in \mathbb{R}^r$$

точки $p \in U$ и проходящий через неё путь

$$x^i(t) = (x^1(p), \dots, x^{i-1}(p), t - x^i(p), x^{i+1}(p), \dots, x^r(p))$$

на $\varphi(U) \in \mathbb{R}^r$. Его прообраз $\gamma^i(t) = \varphi^{-1}(x^i(t))$ является путём на X с началом в p. Класс эквивалентности этого пути образует вектор касательного пространства, обозначаемый $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pX$.

Зависящее от $p \in U$ семейство векторов $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ образует сечение $\frac{\partial}{\partial x^i}(U)$ касательного расслоения над U. Согласно примеру 2.1, классы эквивалентности путей $\{x^i(t) | i = 1, \dots, r\}$ образуют базис касательного пространства $T_{x(p)}\mathbb{R}^r$. Образами этих векторов под действием дифференциала $d\varphi^{-1}_{x(p)}$ диффеоморфизма φ^{-1} как раз и являются вектора $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pX | i = 1, \dots, r\}$. Следовательно они также образуют базис и, значит, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(U) | i = 1, \dots, r\}$ — базисный набор сечений над U.

Сопряженное к касательному расслоению $\pi : TX \to X$ расслоение

$$\pi^* : T^*X \to X,$$

называется *кокасательным.* Как мы уже видели, локальная карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ порождает базисный набор сечений $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(U) | i = 1, \dots, r\}$ над U. Двойственный ему набор сечений кокасательного расслоения обозначается $\{dx^i(U) | i = 1, \dots, r\}$. Другими словами, $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$.

Сечения векторных расслоений называются *векторными полями.* В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r)\}$ векторными поля имеют вид $T^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}(p)$. Закон изменения вида векторного поля при замене локальной карты с функцией перехода

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r)$$

был найден в разделе 2.3. Там было доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}} \tag{3}$$

и, следовательно,

$$T^j\frac{\partial}{\partial x^j} = \widetilde{T}^{\tilde{j}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{T}^{\tilde{j}} = T^j\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}.$$

Сечения ковекторных расслоений называются *ковекторными полями.* В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r)\}$ ковекторные поля имеют вид $T_i(p)dx^i(p)$.

Базис $\{dx^1, \dots, dx^r\}$ сопряжен базису $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}\}$. Поэтому, согласно законам линейной алгебры, соотношение (3) влечет $dx^i = A^i_{\tilde{i}}d\tilde{x}^{\tilde{i}}$, где $\{A^i_{\tilde{i}}\} = ((\{\frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}{\partial x^i}\})^{-1})^* = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}}$, то есть

$$(4) \qquad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}} d\tilde{x}^{\tilde{i}}$$

Таким образом,

$$T_i dx^i = \widetilde{T}_{\tilde{i}} d\tilde{x}^{\tilde{i}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{T}^{\tilde{i}} = T^j \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j}.$$

Тензорные произведения векторных и ковекторных расслоений

$$\pi^{\otimes m} \otimes (\pi^*)^{\otimes n} : (TX)^{\otimes m} \otimes (T^*X)^{\otimes n} \to X$$

называются *тензорными расслоениями типа* (m, n). Их сечения называются *тензорными полями типа* (m, n). В локальной тривиализации, порожденной локальной картой $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \ldots, x^r)\}$ тензорные поля типа (m, n) имеют вид

$$T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_n}.$$

Из соотношений (3,4) следует

Теорема 5.1. *При замене локальных карт с функцией перехода*

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \ldots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^r)$$

вид сечений меняется по правилу

$$T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_n} =$$

$$\widetilde{T}^{\tilde{j}_1 \ldots \tilde{j}_m}_{\tilde{i}_1 \ldots \tilde{i}_n} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{j_m}} \otimes d\tilde{x}^{i_1} \otimes \cdots \otimes d\tilde{x}^{i_n},$$

где

$$\widetilde{T}^{\tilde{j}_1 \ldots \tilde{j}_m}_{\tilde{i}_1 \ldots \tilde{i}_n} = T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j_m}}}{\partial x^{j_m}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_n}}$$