Логика и алгоритмы 2017. Листок 4.
`https://sites.google.com/site/logiccourse2017/`
Срок сдачи 29.11

Правила: за обязательные задачи вы получаете 4 балла, а за каждую дополнительную задачу по 2 балла. Таким образом, чтобы получить 10 баллов, достаточно решить все обязательные и 3 дополнительные задачи.

Обязательные задачи

1. **(письменно)** Запишите пропозициональную формулу, выражающую приведенное рассуждение, и проверьте, является ли она тавтологией.

   Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.

2. **(письменно)** Докажите, что любую булеву функцию от произвольного числа аргументов можно записать с помощью $x \leftrightarrow y$ (эквиваленция), $x \oplus y$(сложение по модулю 2) и функции $maj(x, y, z)$ от трех аргументов, которая равна значению, которое чаще всего встречается среди аргументов x, y и z.

3. **(письменно)** Постройте вывод следующей формулы:

$$A \wedge \neg B \to \neg(A \to B)$$

4. **(письменно)** Запишите любые четыре аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля в виде формул логики предикатов (в сигнатуре с единственным бинарным предикатным символом $\in$).

Дополнительные задачи

5. Докажите, что $x \vee y$ нельзя выразить с помощью $x \leftrightarrow y$, $x \oplus y$ и 1 (функция, тождественно равная 1).

6. Пусть $A(p_1, \dots, p_n)$ — пропозициональная формула, построенная из переменных $p_1, \dots, p_n$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\neg$. *Двойственная формула* $A^\circ(p_1, \dots, p_n)$ получается из нее заменой всех $\wedge$ на $\vee$, а всех $\vee$ — на $\wedge$.

   а) Докажите по индукции, что $A^\circ(p_1, \dots, p_n) \equiv \neg A(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$

   б) Докажите, что если $A \equiv B$, то $A^\circ \equiv B^\circ$.

   в) Докажите, что если A — тавтология, то $\neg A^\circ$ — тавтология.

   г) Объясните, как, зная СДНФ для A°, построить СКНФ для A.

7. Общезначимы ли следующие формулы? Если да — докажите; если нет — постройте опровергающую модель:

   а) $\forall x(P(x) \vee S(x)) \to \forall x P(x) \vee \exists x S(x)$;

   б) $\exists x \forall y \exists z R(x, y, z) \to \forall x \exists y R(x, y, y)$.

8. Приведите следующую формулу, в которой P и Q — двухместные предикатные символы, к предваренной нормальной форме (т.е. найдите эквивалентную формулу, в которой все кванторы идут сначала)

$$\forall x \exists y \big(P(x,z) \to Q(y,z)\big) \to \exists y \big(P(x,y) \to \neg \forall x Q(y,x)\big)$$

9. Рассмотрим модель $(\mathbb{N}; S, P)$, где $S(x,y,z)$ верно, если и только если $x + y = z$, и $P(x,y,z)$ верно, если и только если $x \cdot y = z$. Напишите формулы, которые выражают следующее:

   а) $x = 0$;

   б) $x = 1$;

   в) x — четно;

   г) x — простое число.

10. Напишите формулу в сигнатуре $(\leqslant, =)$, модели которой — это в точности линейно упорядоченные множества мощности не больше 3.

11. Через $\mathbb{N}^*$ обозначим множество всех кортежей (последовательностей) натуральных чисел произвольной длины (для краткости мы будем их записывать без скобок и запятых). *Деревом* называется такое подмножество T множества $\mathbb{N}^*$, что если $\alpha \in T$, а β — начало α, то $\beta \in T$. Дерево имеет *конечное ветвление*, если для любого кортежа $\alpha \in T$ только конечное количество кортежей вида αx, где $x \in \mathbb{N}$, принадлежит T (то есть, когда к кортежу α добавляется только одно число в конец). *Лемма Кёнига* утверждает, что любое бесконечное (т.е. содержащее бесконечное число кортежей) дерево с конечным ветвлением содержит бесконечную ветвь, т.е. все начала некоторой бесконечной последовательности натуральных чисел. Докажите лемму Кёнига при помощи теоремы о компактности.