

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА – 2017
ЛИСТОК 3

1. Как известно, для частицы в кулоновском поле $U(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|}$ существует интеграл движения

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{M} - \frac{\alpha \vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Вычислите скобки Пуассона $\{A_i, A_j\}$.

2. Каков смысл канонического преобразования, задаваемого производящей функцией $\Phi(q, P) = \alpha q P$?
3. Показать, что каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$\Phi(x, y, P_x, P_y) = x P_x + y P_y + \varepsilon(xy + P_x P_y),$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, представляет собой поворот в фазовом пространстве.

4. Найти производящую функцию $F(q, Q)$ канонического преобразования, состоящего в переходе от $q(t), p(t)$ к $Q(t) = q(t+T), P(t) = p(t+T)$ ($T = \text{const}$) для движения в квадратичном потенциале $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

5. Введем переменную

$$a = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}.$$

Показать, что $Q = a$ и $P = ia^*$ – канонические переменные. Выразить через a и a^* функцию Гамильтона гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Найти производящую функцию $F(q, Q)$ канонического преобразования $(q, p) \rightarrow (Q, P)$.

6. Найти закон движения частицы в поле $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.
7. Три одинаковых частицы массы m движутся по прямой и попарно взаимодействуют друг с другом по закону $g^2(x_i - x_k)^{-2}$. Показать, что кроме полного импульса и энергии существует дополнительный интеграл движения

$$A = m\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \frac{g^2\dot{x}_1}{(x_2 - x_3)^2} - \frac{g^2\dot{x}_2}{(x_1 - x_3)^2} - \frac{g^2\dot{x}_3}{(x_1 - x_2)^2}.$$